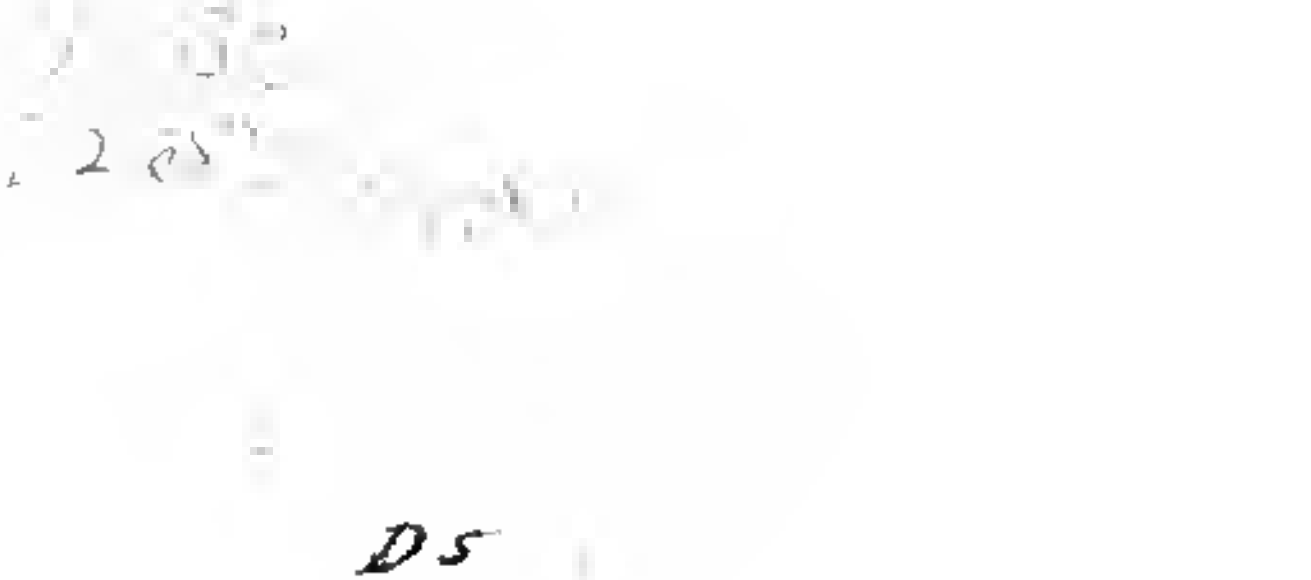
OPUSCULES MATHEMATIQUES, OU MEMOIRES SUR DIFFERENS SUJETS DE GEOMETRIE, DE...

Alembert : d'


D 5

OPUSCULES

MATHÉMATIQUES.

TOME VII.

OPUSCULES

MATHÉMATIQUES,

OU

MÉMOIRES sur différens Sujets de Géométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Astronomie, &c.

Par M. D'ALEMBERT, Secrétaire perpétuel de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse, d'Angleterre & de Russie, de l'Institut de Bologne, & des Societés Royales des Sciences de Turin & de Norwege.

TOME VII.

A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, fils aîné, Libraire du Roi, près le Pont-Neuf.

M. DCC. LXXX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

AVERTISSEMENT.

LA plupart des morceaux que renferment ce Volume & le ſuivant, ſont faits il y a trois ou quatre années, & quelques-uns même depuis bien plus long-temps. Ce ſeront vraiſemblablement, à peu de choſe près, mes derniers Ouvrages Mathématiques, ma tête, fatiguée par quarante-cinq années de travail en ce genre, n'étant plus guère capable des profondes recherches qu'il exige. Un de mes amis a même bien voulu m'épargner le travail pénible de la correction des épreuves. Les imperfections inévitables du manuſcrit ont occaſionné des fautes d'impreſſion, dont j'ai remarqué quelques-unes en parcourant les feuilles imprimées; on trouvera les principales dans l'*Errata*; je me flatte que les autres ſeront aiſées à corriger. On pourra

auſſi, pour certains éclairciſſemens, conſulter l'*Appendice* qui termine chaque Volume.

Je demande donc aux Géomètres pour ces deux Tomes de mes *Opuſcules*, plus d'indulgence encore qu'ils n'ont bien voulu en avoir pour les précédens; & je ſerai content de ce dernier fruit de mon travail, s'ils y trouvent au moins quelques vues dont ils puiſſent tirer un meilleur parti que moi, ce qui ne leur ſera pas difficile.

TABLE DES TITRES

Contenus dans ce ſeptiéme Volume.

CINQUANTE-DEUXIÉME MÉMOIRE.

§. I. *Réflexions ſur la Théorie des Reſſorts*, page 1

§. II. *Sur le Calcul des Probabilités*, 39

§. III. *Sur des différentielles réductibles aux arcs de ſections coniques*, 61

CINQUANTE-TROISIÉME MÉMOIRE.

Sur l'attraction des ſphéroïdes elliptiques.

§. I. *Démonſtration d'un theorême de M. Maclaurin*, 102

§. II. *Comparaiſon des deux formules des pages 181 & 184 du Tome VI de nos Opuſcules*, 116

§. III. *Differentes manieres de calculer l'attraction des*

Sphéroïdes elliptiques, avec des recherches sur l'attraction de quelques autres Sphéroïdes, 159

REMARQUES SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉD.

Remarque sur l'article 133, 208
Remarque sur l'article 136, 210
Remarque sur l'article 173, 211
Remarque sur l'article 174 & suiv. 214
Remarque sur l'article 194, 216
Remarque sur l'article 195, 221
Remarque sur l'article 196, 222
Remarque sur l'article 201, 224
Remarque sur l'article 202, ibid.
Remarque sur l'article 209, 227
Remarque sur l'article 210, 229

CINQUANTE-QUATRIÉME MÉMOIRE,

Contenant différentes Recherches d'Optique.

§. I. *Sur les loix de la réfraction,* 234
§. II. *Considérations sur la réfraction des rayons dans un ou plusieurs prismes,* 244
§. III. *Sur les couleurs qui se forment au foyer des Lentilles, & sur les dimensions de ce foyer,* 280

CINQUANTE-CINQUIÉME MÉMOIRE.

Recherches ſur différens Sujets.

§. I. *Sur le mouvement des corps peſans, en ayant égard à la rotation de la Terre autour de ſon axe,* 314

NOTES SUR LES DÉMONSTRAT. PRÉCÉD.

Note (a^1), *article* 7, 344
Note (a^2), *article* 8, ibid.
Note (a^3), *article* 10, ibid.
Note (a^4), *article* 14, 347
Note (a^5), *article* 16, 348
Note (a^6), *article* 18, 349
Note (a^7), *article* 19, 351
Note (a^8), *article* 22, 354
Note (a^9), *article* 22, 360
Note (a^{10}), *article* 32, 365
Note (a^{11}), *article* 34, 367
Note (a^{11}), *article* 36, 368
Note (a^{13}), *article* 40, 370

§. II. *Sur la rotation d'un corps de figure quelconque,* 372

§. III *Sur l'intégration de quelques équations différentielles,* 377

APPENDICE contenant quelques Remarques relatives à différens endroits de ce VIIe Volume.

Remarque ſur la page 16, art. 40, lig. 8, 384
Remarque pour la page 34, 388
Remarque ſur le LIIe Mémoire, §. II, page 45, 384
Remarque paur la page 96, 390.
Remarque pour l'art. 112 du LIIIe Mémoire, 391
Remarque ſur le LIIIe Mémoire, art. 126, pag. 166, 393
Remarque ſur la page 171, art. 134, 387
Remarque ſur le LIIIe Mémoire, art. 134, page 172, ibid.
Remarque ſur le LVe Mémoire, §. II, 394

Fin de la Table.

EXTRAIT des Regîtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 5 Juillet 1780

MESSIEURS LE MONNIER, l'Abbé BOSSUT, & moi, ayant rendu compte à l'Academie des Volumes VII & VIII des *Opuſcules Mathematiques* de M. D'ALEMBERT, l'Academie a jugé cet Ouvrage digne de paroître ſous ſon Privilege. En foi de quoi j'ai ſigné le preſent Certificat. A Paris, ce 5 Juillet 1780.

Le Marquis DE CONDORCET,
Secretaire perpétuel de l'Academie Royale des Sciences.

Ouvrages de M. d'Alembert, qui ſe trouvent chez le même Libraire.

Opuſcules mathématiques, ou Memoires ſur différens ſujets de Géométrie, de Mechanique, d'Optique, d'Aſtronomie, &c. 8 vol. *in*-4°, pet. format, avec 30 planches, 1761—1780, 84 l.
Les Tomes V, VI, VII & VIII, ſeparément, 12 liv. chaque.

Recherches ſur différens points importans du ſyſtême du Monde, 3 vol. *in*-4°, pet. format, avec 6 planches, 1754—1756, 21 l.
Tome III, ſéparément, 7 l. 10 ſ.

Nova Tabularum Lunarium emendatio, 20 pag. *in*-4°, br. 12 ſ.

Nouvelles Tables de la Lune, 32 pag. *in*-4°, pet. format, br. 18 ſ.

Traité de Dynamique, dans lequel les loix de l'équilibre & du mouvement des corps ſont reduites au plus petit nombre poſſible, & démontrées d'une maniere nouvelle, &c. *in*-4°, petit format, nouvelle édition, 1758, avec 5 planches, 9 l.

Traité de l'équilibre & du mouvement des Fluides, pour ſervir de ſuite au Traité de Dynamique, in-4°, pet. format, nouv. édit. conſiderablement augmentée, avec 10 planches, 1770, 12 l.

Recherches ſur la preceſſion des Equinoxes & ſur la nutation de l'axe de la Terre dans le ſyſtême Newtonien, *in*-4°, pet. format, avec 4 planches, 1749, 7 l. 10 ſ.

Eſſai d'une nouvelle Theorie de la réſiſtance des Fluides, *in*-4°, petit format, avec 2 planches, 1752, 7 l. 10 ſ.

Reflexions ſur la cauſe generale des Vents, Pièce qui a remporté le prix de l'Academie des Sciences de Berlin, en 1746, *in*-4°, petit format, avec deux planches, nouvelle edition, corrigée. *Sous preſſe*

Elémens de Muſique théorique & pratique, ſuivant les principes de M. Rameau, eclaircis, developpés & ſimplifiés, nouvelle édition conſiderablement augmentée, *in*-8°, avec 10 planches, 1772, 4 l. 10 ſ.

Mélanges de Littérature, d'Hiſtoire & de Philoſophie, 5 vol. *in*-12, nouvelle édition, augmentée, 1770, 13 l.

OPUSCULES

OPUSCULES
MATHÉMATIQUES.

LII. MÉMOIRE.

§. I.

Réflexions ſur la Théorie des Reſſorts.

1. IL me ſemble que la Théorie de la tenſion des reſſorts, telle que les Géometres l'ont donnée juſqu'à préſent, laiſſe beaucoup à deſirer. Voici quelques doutes ſur ce ſujet; je les ſoumets à leur jugement.

2. On ſuppoſe ordinairement que le reſſort BA (Fig. 1) étant fixe en B, & tendu par un poids P, l'effort du poids P en M eſt proportionnel au moment $P \times AQ$ de ce poids, & que cet effort eſt outre cela en raiſon de la courbure en M, c'eſt-à-dire, en raiſon

inverſe du rayon oſculateur ; ce qui donne l'équation de la courbe que les Géometres ont nommée élaſtique.

3. On peut demander d'abord comment le poids P peut agir en M par un bras de levier ? On le concevroit aiſément ſi AM étoit une ligne roide & inflexible, mais elle ne l'eſt pas.

4. Cette premiere difficulté (Fig. 2) a pourtant une ſolution, car on peut évidemment conſidérer le reſſort bandé comme une ſuite de lignes droites infiniment petites & inflexibles BR, RG, GO, OA, &c. faiſant entr'elles des angles infiniment obtus BRG, RGO, &c. & auxquelles ſoient appliquées en R, G, O, &c. ou même, ſi l'on veut, dans tous les points des petits côtés inflexibles BR, RG, &c. des puiſſances que je nomme K, & qui tendent à remettre tous ces petits côtés en ligne droite les uns avec les autres. Ces puiſſances (pour rendre la ſolution plus générale) peuvent être ſuppoſées dirigées comme on voudra, & faiſant avec ces petits côtés des angles variables quelconques.

5. Cela poſé, il eſt facile de démontrer par les principes de la Méchanique, que le moment du poids P par rapport à un point quelconque, R, par exemple, eſt égale à la ſomme des momens des puiſſances K de tout l'arc RA, par rapport au même point R.

6. En effet, les petites lignes BR, RG, &c. étant ſuppoſées mobiles autour des points R, G, O, &c.

Il eſt clair que pour l'équilibre entre le poids P & les puiſſances K, il faut qu'à chaque angle R, G, &c. la force réſultante de l'action du poids P & de toutes les puiſſances K de l'arc AR, AG, &c. ſoit dirigée ſuivant RG, GO, &c. autrement les petites lignes RG, GO, &c. ſouffriroient encore quelque flexion autour des points R, G, &c.

7. Or dans cette ſituation d'équilibre, qu'on ſuppoſe ſucceſſivement un point fixe en R, en G, &c. & la partie $RGOA$, GOA, &c. abſolument roide & inflexible, il eſt évident que l'équilibre ſubſiſtera.

8. Donc la ſomme des momens des puiſſances K en R, en G, &c. eſt = au moment du poids P par rapport à K, à G, &c.

9. Imaginons maintenant les puiſſances K décompoſées (Fig. 1) en puiſſances X parallèles aux $x(AQ)$ & en puiſſances Y parallèles aux $y(QM)$ & nommant l'arc AM, s, nous aurons la différence du moment du poids P par rapport à M, c'eſt-à-dire, Pdx = à la différence des momens des puiſſances Y par rapport à M, c'eſt-à-dire, $dy\int Yds$, plus la différence des momens des puiſſances X par rapport à M, c'eſt-à-dire, $dy\int Xds$; donc ſi l'on appelle ω le complément de l'angle AMQ que la courbe fait en M avec la verticale MQ, on aura, à cauſe de $dx = ds$ cof. ω, & $dy = ds$ ſin. ω, l'équation

Pds cof. $\omega = ds$ cof. $\omega\int Yds + ds$ ſin. $\omega\int Xds$, ou $P - \int Yds = \text{tang.}\,\omega \times \int Xds$, & en différentiant de

nouveau, $-Yds = \text{tang. } \omega X ds + d \text{ tang. } \omega \int X ds$, ou $-\frac{Yds - \text{tang. } \omega X ds}{d(\text{tang. } \omega)} = \int X ds$. Donc en ſuppoſant tang. $\omega = \zeta$, on aura $d\left[\left(\frac{ds}{d\zeta}\right)(Y + \zeta X)\right] = -X ds$, & ſuppoſant encore $ds = p d\zeta$, on aura $d(pY + p\zeta X) = -pX d\zeta$.

10. On peut conſidérer encore que $d(\text{tang. } \omega) = \frac{d\omega}{\text{cof. } \omega^2}$, d'où $-Yds \text{ cof. } \omega^2 - \text{ſin. } \omega \text{ cof. } \omega \times X ds = d\omega \int X ds$, ce qui donne une autre forme à l'équation.

11. Or ſans pouſſer plus loin cette analyſe, il me ſemble d'abord que la ſolution eſt impoſſible, ſi la direction AP du poids P n'eſt pas tangente de la courbe en A; car il eſt d'abord évident que pour l'équilibre la force en A réſultante de l'action du poids P & des forces X & Y appliquées en A, doit être dirigée ſuivant (Fig. 2) AO, autrement il y auroit une nouvelle flexion en O. Donc, ſi l'on ſuppoſoit l'angle OAZ aigu, les forces X, Y appliquées en A, devroient être chacune du même ordre que la force du poids P. Donc les forces X & Y voiſines de celles du point A, devroient auſſi être du même ordre que P, autrement il y auroit un défaut de continuité dans l'expreſſion de ces forces; & il ſeroit de plus néceſſaire (pour l'obſervation de la même loi de continuité) que cela fût toujours ainſi, excepté tout au plus en quelques points iſolés de la courbe $BRGOA$, puiſque

les forces X & Y, après avoir été finies dans un certain eſpace de la courbe, ne peuvent être ſuppoſées infiniment petites dans le reſte de cette même courbe.

12. Mais ſi d'un autre côté les puiſſances X & Y étoient par toute la courbe du même ordre que le poids P, elles ne pourroient lui faire équilibre, puiſque la ſomme des momens de ces puiſſances par rapport à un point quelconque R, ſeroit infiniment plus grand que le moment du poids P par rapport au même point R, ce qui ſeroit contraire à l'article 5 ci-deſſus.

13. Donc dans tous les points de la courbe $AOGR$, & par conſéquent auſſi au point A, les forces X & Y doivent être infiniment petites par rapport au poids P.

14. Donc la puiſſance K en A, réſultante des forces X & Y eſt auſſi infiniment petite par rapport au même poids P, & puiſque la force réſultante du poids P & de la force K en A doit être dirigée ſuivant AO, il s'enſuit que le premier côté AO de la courbe fait un angle infiniment petit avec la direction du poids P, c'eſt-à dire qu'il eſt dans cette direction, & par conſéquent vertical.

15. Imaginons préſentement que les forces qui tendent le reſſort, au lieu d'être décompoſées parallélement aux x & aux y, le ſoient en chaque point dans la direction des petits côtés ds de la courbe, & dans une direction perpendiculaire à ces petits côtés, & nommons S les premieres de ces puiſſances, & ρ les autres, on verra d'abord, 1°. que ρ doit être infiniment

petit au point A. 2°. Que $P-\int S\,ds$ ſera la force qui tirera chaque petit côté de la courbe ſuivant ſa longueur. 3°. Que cette force en produira une autre perpendiculaire au petit côté ſuivant, & égale à $\frac{ds}{R}(P-\int S\,ds)$, R étant le rayon oſculateur en M (Fig. 1). 4°. Que cette derniere force $\frac{ds}{R}(P-\int S\,ds)$ doit être $=\rho$, afin que le côté ſuivant ſoit tiré en ligne droite. D'où il eſt clair que chacune des forces ρ doit être infiniment petite par rapport au poids P.

16. On voit auſſi que les forces S doivent de même être infiniment petites par rapport à P, excepté tout au plus en quelques points iſolés de la courbe AM, puiſqu'autrement $\int S\,ds$ ſeroit infini par rapport à P, ce qu'on ne ſauroit ſuppoſer ici.

17. Imaginons donc que g ſoit la peſanteur, & M la maſſe du poids P, on aura d'abord $P=g.M$; ſuppoſons enſuite que $\alpha^2 ds$ ſoit la maſſe de chaque petite portion de la courbe AM, que je regarde comme un corps ſolide très-mince, dont l'épaiſſeur en M eſt α^2; ſoient enfin γ, σ, les forces variables appliquées en chaque point, on pourra ſuppoſer $S=\sigma\alpha^2$, & $\rho=\gamma\alpha^2 ds$, d'où l'on aura $g.M-\int\sigma\alpha^2 ds=R\gamma\alpha^2$; donc $-\sigma ds=d(\gamma R)$, en ſuppoſant pour plus de ſimplicité α^2 conſtant dans toute l'étendue de la courbe.

18. Si $\sigma=0$, c'eſt-à-dire, ſi le reſſort eſt inextenſible ſuivant ſa longueur, & ſimplement flexible, il ne

reſtera que les forces γ, & on aura $\gamma R =$ à une conſtante, c'eſt-à-dire, γ en raiſon inverſe de R, ce qu'on ſait depuis long-temps; de plus il eſt clair, par l'article 15, que dans cette hypothèſe il ne peut y avoir d'équilibre, à moins que la direction AP ne ſoit tangente de la courbe en A.

19. Or tous les Auteurs qui ont donné juſqu'ici des ſolutions du problême de la courbe élaſtique, ſuppoſent, ce me ſemble, que la direction du poids P fait en A un angle aigu avec la courbe, la tangente au point fixe B étant horiſontale. Voyez l'Ouvrage de M. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas*, &c. page 268.

20. Cette hypothèſe, dira-t-on, paroît confirmée par l'expérience; car ſi on fixe en B un reſſort d'acier, par exemple, il paroît ſe courber de maniere que l'angle RAM eſt aigu.

21. On pourroit dire que l'expérience trompe les yeux là-deſſus, & qu'il eſt abſolument néceſſaire que l'extrêmité des fibres du reſſort en A ſoit dirigée ſuivant AP, autrement la force γ en A devroit être du même ordre que P, & la force γ infiniment près du point A, ſeroit infiniment petite par rapport à P, ce qui paroît choquant. Mais j'avoue que cette réponſe à la difficulté ne paroît pas ſatisfaiſante, & que l'obſervation y ſemble abſolument contraire.

22. Ce n'eſt pas tout. La conſéquence de $\gamma R =$ à une conſtante, paroît avoir un inconvénient, c'eſt qu'il

en réſulteroit que le reſſort pourroit prendre une figure courbe quelconque En effet, il paroît très-naturel de ſuppoſer que la force infiniment petite $\gamma ds.\alpha^2$ qui tend à remettre en ligne droite les deux petits (Fig. 2) côtés RG, GO, eſt proportionnelle à l'angle infiniment petit OGQ, en ſorte que ſi on appelle u la force qui répond à un angle infiniment petit α', pris à volonté, on aura $\alpha^2\gamma ds = \frac{u}{\alpha'} \times \frac{ds}{R}$, or on a (art. 17) $\gamma\alpha^2 ds = \frac{gMds}{R}$ ou $\frac{Pds}{R}$; donc $\frac{Pds}{R} = \frac{u}{\alpha'} \times \frac{ds}{R}$, 1 exprimant le ſinus total; d'où $u = \frac{P\alpha'}{\text{ſin. tot.}}$. Or de-là il paroît s'enſuivre, 1°. que ſi le reſſort a une telle force élaſtique, que $u = \frac{P\alpha'}{\text{ſin. tot.}}$, il peut prendre toutes ſortes de figures étant tendu par le poids P, pourvu que AP ſoit tangente en A. 2°. Que ſi $u > \frac{P\alpha'}{\text{ſin. tot.}}$ le reſſort ne pourra jamais être fléchi par le poids P, mais reſtera ſitué horiſontalement & en ligne droite. 3°. Que ſi $u < \frac{P\alpha'}{\text{ſin. tot.}}$, le poids P fléchira le reſſort juſqu'à lui faire prendre la ſituation rectiligne verticale.

23. Je demande aux Géometres ſi ces réſultats leur paroiſſent vrais, & conformes à l'expérience. Je doute qu'ils conviennent qu'un reſſort plié par un poids, peut prendre toutes ſortes de courbures; cependant la ſuppoſition ſur laquelle cette aſſertion eſt fondée, paroît aſſez

assez naturelle, savoir que la force γ qui, en vertu du ressort, agit à chaque point de la courbe perpendiculairement à la courbe même, est en raison inverse du rayon de courbure.

24. Cette supposition même ne paroît pas s'éloigner de celle que font tous les Géometres dans la solution du problême de la courbe élastique, & que nous avons énoncée ci-dessus, art. 2.

25. Mais l'hypothèse sur laquelle est fondée cette solution, me paroît susceptible d'une difficulté très-considérable. Il me semble que la plupart des Auteurs qui ont résolu jusqu'ici ce problême, entr'autres MM. Euler & Daniel Bernoulli (Voyez Mémoires de Petersb. Tome III, pag. 67 & 71) ont supposé que la force γ qui agit perpendiculairement au petit côté GO, par exemple, & qu'on suppose placée en O, fait équilibre avec le moment $P \times AQ$ du poids P par rapport au point G. Or il me paroît démontré (art. 6 ci-dessus) que $P \times AQ$ n'est pas seulement égal au moment de la puissance γ par rapport au point G, mais à la somme des momens de toutes les puissances γ (qui agissent sur l'arc AM) par rapport à ce même point G. La supposition de $\gamma \times GO = P \times AQ$ ne seroit admissible qu'en supposant $RGOA$ une verge inflexible, & γ la seule puissance appliquée à cette verge au point O; supposition qui ne s'accorde nullement avec celle d'un ressort *flexible*, qui fait effort dans *tous ses points* pour se rétablir.

26. De plus, en admettant même la ſuppoſition de MM. Bernouilli & Euler, il paroît s'enſuivre que puiſque GO eſt infiniment petit, & que $\gamma \times GO = P \times AQ$, la force γ appliquée en O eſt infinie par rapport à P, ce qui paroît bien difficile à ſuppoſer, d'autant qu'on peut imaginer GO de tel ordre d'infiniment petit qu'on voudra, & qu'ainſi γ ſera ſucceſſivement infini du premier, du ſecond, du troiſiéme, &c. ordre par rapport à P.

27. Aucun Auteur, que je ſache, excepté M. de la Grange, ne s'eſt mis en peine de réſoudre cette difficulté, que nous avions déja indiquée ailleurs (*Opuſcules*, Tome I, pag. 13); ce grand Géometre a donné dans les Mémoires de Berlin, 1769, une maniere fort ſimple & fort ingénieuſe d'expliquer l'action du reſſort. Pour cela, il prolonge juſqu'à la verticale AP tous les petits côtés RG, GO; faiſant enſuite $GQ' = GO$, & en ſuppoſant par-tout en O, & en Q' une force γ, qui tende à tapprocher les côtés GQ', GO, il prouve (comme on le peut voir dans ſon excellent Mémoire) que le moment du poids P par rapport à G, eſt égal au moment de cette force γ par rapport à G, c'eſt-à-dire, à $\gamma \times GO$; il ſuppoſe enſuite avec tous les autres Mathématiciens, que ce dernier moment eſt en raiſon inverſe de R, d'où réſulte l'équation ordinaire de la courbe élaſtique.

28. M. de la Grange parvient à cette ingénieuſe explication, en ſuppoſant les côtés du reſſort prolongés

juſqu'en *AP*, les forces en *Q* & *O* égales & contraires, & des forces en *V*, *Z* auſſi égales & contraires, leſquelles il prouve être égales au poids *P*, ce qui n'a lieu qu'hypothétiquement, puiſqu'il n'y a ici de forces réellement agiſſantes que le poids *P*, & les forces appliquées directement aux côtés *RG*, *GO*, *non prolongés*, leſquelles forces tendent à remettre ces deux côtés en ligne droite, & ainſi des autres.

29. Or il ſeroit à deſirer, ce me ſemble, que M. de la Grange eût fait voir, ſans prolonger les côtés, & ſans toutes les forces hypothétiques qu'il imagine, comment le poids *P* eſt en équilibre avec les forces directement appliquées aux points *G*, *O*; ce qui paroît néceſſaire pour mettre la ſolution hors de doute.

30. M. de la Grange paroît ſuppoſer encore (& avec raiſon, ce me ſemble) que la force qui tend à rétablir le reſſort aux points *G*, *O*, &c. eſt perpendiculaire aux côtés de la courbe; mais au point *A*, où le poids eſt attaché, il paroît ſuppoſer auſſi (& il me ſemble que ſa théorie exige cette hypothèſe) que la force du reſſort agit ſuivant *AV* dans une direction verticale & contraire à *AP*. Je ne ſais ſi ces deux ſuppoſitions s'accordent entr'elles, & s'il ne s'enſuivroit pas de-là que la force du reſſort en *A*, & infiniment près du point *A* auroit des directions très-différentes, ce qui me ſemble difficile à admettre; de plus, il paroît que la force du reſſort en *A* doit être ſuppoſée perpendiculaire au côté *AO*.

31. Enfin, il me ſemble encore que la théorie de M. de la Grange ne leve pas la difficulté que nous avons déja faite à la théorie ordinaire (art. 26), ſavoir que la force γ appliquée aux différens points de la courbe, ſeroit infinie, & même d'un ordre d'infini auſſi élevé qu'on voudroit. On ne voit pas trop bien d'ailleurs comment la force $\gamma \times GQ$ pourroit être en raiſon inverſe de R, ce qui donneroit encore $\gamma = \frac{aR}{GQ} = -\frac{a\,ds}{du\,ds} = -\frac{a}{du}$; c'eſt-à dire, non-ſeulement infinie, mais infinie d'un ordre d'autant plus grand que l'angle OGQ' des côtés de la courbe ſeroit ſuppoſé plus petit.

32. Toutes ces réflexions ſont de ſimples queſtions que je lui propoſe, & que je l'invite à éclaircir pour l'inſtruction des Géometres, & pour mettre ſon ingénieuſe théorie à l'abri de toute atteinte. Si on ſuppoſe avec M. Jacques Bernoulli (Mém. Acad. 1705) que le reſſort a une certaine (Fig. 4) largeur ac, & que le moment du poids P par rapport à un point quelconque c, eſt $= \lambda \times ac$ (λ étant la force qui agit ſuivant ba & ab pour rapprocher les fibres ac, cb) les difficultés des articles 25 & 26 ſubſiſteront toujours; la force γ ſera infinie & toujours la même, de quelqu'ordre d'infiniment petit qu'on ſuppoſe l'angle acb ou $\frac{ds}{R}$, & d'ailleurs on n'explique pas comment (la

courbe Ac étant *flexible* dans tous ſes points) le moment du poids P par rapport à c, eſt égal au moment de la force contractive ab par rapport au même point c. On peut remarquer que, ac étant comme infiniment petit, cette hypothèſe de M. Jacques Bernouilli reviendroit à peu près à celle où l'on ſuppoſeroit les forces du reſſort tangentes à la courbe, ce qui donneroit dans l'article 17, $\gamma = 0$, & $\pi = 0$; d'où l'on voit que cette ſuppoſition conduiroit à un réſultat illuſoire, ce qu'il eſt d'ailleurs aiſé de voir directement. Car ſi on ſuppoſe $\gamma = 0$ & les forces π rangentes à la courbe, l'effort du poids P en A doit être détruit par la premiere force π appliquée en A, & dirigée d'une maniere contraire au poids P, dont la direction, comme on l'a vu, doit toucher la courbe en A. Or l'action du poids P étant entierement détruite par la ſeule force du reſſort appliquée en A, il eſt clair que la force élaſtique doit être nulle, ou plutôt de nul effet dans tous les autres points; qu'ainſi $\pi = 0$, & que le reſſort formera une ligne droite, ce qui eſt contre l'expérience.

33. Quoi qu'il en ſoit, il paroît évident que l'équation générale des courbes élaſtiques rendues par un poids eſt $-\pi\,ds = d(\gamma R)$, la direction verticale AP étant tangente de la courbe en A.

34. Cette équation peut encore ſe déduire aiſément de la formule de l'article 10, ce qui prouvera l'accord de nos méthodes, en effet, il eſt aiſé de voir que la

force $X = \frac{\gamma dy}{ds} - \frac{\sigma dx}{ds} = y$ ſin. $\omega - \sigma$ coſ. ω, & que la force $Y = \frac{\gamma dx}{ds} + \frac{\sigma dy}{ds} = \gamma$ coſ. $\omega + \sigma$ ſin. ω; donc (art. 10) on aura, en ſubſtituant & réduiſant, γ coſ. $\omega = -\frac{d\omega}{ds} \int (\gamma ds$ ſin. $\omega - \sigma ds$ coſ. $\omega)$, ou $-\frac{\gamma ds}{d\omega}$ coſ. $\omega = \int \gamma ds$ ſin. $\omega - \int \sigma ds$ coſ. ω; différentiant encore & réduiſant, on aura $-\sigma ds$ coſ. $\omega =$ coſ. $\omega d\left(-\frac{\gamma ds}{d\omega}\right)$; & comme $d\omega = -\frac{ds}{R}$, il eſt clair qu'on aura $-\sigma ds = d(\gamma R)$.

35. Dans la ſuppoſition de $\sigma = 0$, c'eſt-à-dire, de l'inextenſibilité du reſſort, il eſt clair, & nous l'avons déja dit art. 18, que l'équation eſt γR ou $-\frac{\gamma ds}{d\omega} =$ conſt. & la nature de la courbe élaſtique ne dépendra plus que des différentes ſuppoſitions qu'on pourra faire ſur la valeur de γ.

36. Nous avons vu, article 22, que la ſuppoſition de $\gamma = \frac{B}{R}$, (B étant une conſtante) quoiqu'en apparence très-naturelle, rend le problême indéterminé, & donne pour l'élaſtique telle courbe qu'on voudra, ce qui ne paroît pas conforme à l'obſervation & à l'expérience. Si on ſuppoſoit $\gamma =$ à une fonction de R, on trouveroit R conſtant, c'eſt-à-dire que l'élaſtique ſeroit toujours un cercle, dont le rayon dépendroit de

la force du reſſort; réſultat dont la vérité paroît auſſi très-douteuſe. Il faut donc tâcher de trouver une autre hypothèſe ſur la valeur de γ, qui ne mène pas à cette concluſion, & qui faſſe du problême de l'élaſtique un problême déterminé.

37. Voici une hypothèſe que peut-être on pourroit employer pour cet objet, & que je ſoumets, ainſi que toutes les précédentes, au jugement des Mathématiciens.

38. Je conſidere que ſi les petits côtés (Fig. 3) RG, GO, que je regarde pour un moment comme iſolés, obéiſſoient aux forces γ appliquées perpendiculairement en R, G, O, ſuivant Rr, Gg, Oo, les côtés RG, GO, parviendroient en rg, go, & que les petites lignes Oo, Gg, Rr ſeroient proportionnelles aux valeurs de γ en O, G, R.

39. Cela poſé, ſi les lignes Oo, Gg, Rr étoient égales, c'eſt-à-dire, ſi γ étoit la même aux points O, G, R, l'angle rgo ſeroit évidemment égal à l'angle RGO, & par conſéquent les forces γ n'auroient point diminué cet angle, quoique cette diminution ſoit néceſſaire par l'effort que font ces côtés pour ſe remettre en ligne droite.

40. Donc les lignes Oo, Gg, Rr, doivent être ſuppoſées inégales, ainſi que les forces γ qu'elles repréſentent, & la différence des angles rgo, RGO, ſera égale, comme il eſt aiſé de le voir, à $+\frac{d\,d\gamma}{ds}$. Or la force

réelle qui tend à rétablir le reſſort en ligne droite, peut être ſuppoſée proportionnelle à l'angle infiniment petit qui eſt le complément de l'angle RGO, c'eſt-à-dire, à $-d\omega$, (je mets $-d\omega$, parce que, s croiſſant, ω diminue), & cette force, comme on vient de le voir, eſt en chaque point proportionnelle à $\frac{dd\gamma}{ds}$. Donc $\frac{d\omega}{A} = \frac{dd\gamma}{ds}$, A étant une conſtante ſuppoſée connue par la force donnée du reſſort; d'où $dd\gamma = \frac{d\omega\,ds}{A}$, & comme $\gamma = \frac{B}{R}$ en ſuppoſant $\omega = 0$, on aura $\frac{d\omega\,ds}{A} = dd\left(\frac{B}{R}\right)$ ou $dd\left(\frac{Bds}{ds}\right)$, équation dans laquelle $B = \frac{g.M}{a^2}$, à cauſe de $\gamma R a^2$ (art. 17) $= g.M$. Telle ſera, dans l'hypothèſe propoſée, l'équation de l'élaſtique, qu'on intégrera par les méthodes connues. On ſe ſouviendra (art. 18) que $\omega = 90°$ lorſque $s = 0$, & on ſe ſervira, pour déterminer les conſtantes inconnues, de la condition que $\gamma = 0$ lorſque $s = 0$ (art. 15), & que γ doit auſſi être $= 0$ lorſque s eſt égal à la longueur donnée l du reſſort, puiſqu'au point où s a cette valeur, le reſſort eſt fixement attaché.

41. On peut faire, ſi l'on veut, d'autres hypothèſes ſur la valeur de γ, car je ne tiens pas excluſivement, à beaucoup près, à celle que je viens de propoſer. Il eſt même facile d'en imaginer pluſieurs; mais en général elles

elles doivent être telles que $\gamma = 0$ lorſque $s = 0$ & lorſque $s = l$. D'après ces hypothèſes & l'équation $\gamma R a^2 = g.M$, on déterminera la courbe élaſtique pour chaque cas donné. J'invite les Mathématiciens à perfectionner ces recherches, dont je ne donne ici qu'un léger eſſai.

42. Voilà les difficultés relatives à la Méchanique, qui peuvent, ce me ſemble, être oppoſées aux ſolutions juſqu'ici connues du problême de la courbe élaſtique. Mais en admettant même les principes qu'on a employés juſqu'ici pour cette ſolution, il me ſemble qu'elle eſt encore ſuſceptible de quelques difficultés analytiques.

43. D'après ces principes, nommant AQ, x, QM, y (Fig. 1), on a l'équation $x = -\frac{a^2 dx\, ddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}$, dans laquelle a^2 eſt une conſtante qui dépend du poids P & de l'intenſité de l'action du reſſort, cette équation facile à intégrer donne une valeur de dy en dx & fonction de x, laquelle renferme une conſtante qu'on détermine par cette condition, que, lorſque $\int V(dx^2+dy^2)$ eſt = à la longueur donnée AB du reſſort (que j'appelle l), $\frac{dy}{dx} = 0$, c'eſt-a-dire, que la tangente en B eſt parallèle aux x. Il paroît du moins que cette condition de $\frac{dy}{dx} = 0$, ou quelqu'autre analogue, eſt néceſſaire, pour déterminer la conſtante; car on ne pourroit la déter-

miner par cette ſeule condition, que la valeur totale de $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſoit $= l$, puiſqu'on peut évidemment avoir une infinité de courbes différentes dont la longueur totale $= l$, & dont l'équation ſoit $dy = dx\,\varphi x$, φx repréſentant une fonction de x, qui renferme une conſtante indéterminée.

44. On remarquera de plus que cette conſtante indéterminée eſt abſolument indépendante de la conſtante a^2 qui ſe trouve dans l'équation différentielle, & qui dépend de l'intenſité du reſſort, & de la valeur du poids P; la conſtante dont il s'agit dépend uniquement (Fig. 1) de l'angle QAM, ou de la valeur initiale de $\frac{dy}{dx}$.

45. En effet, ſuppoſant $dy = \zeta dx$, on aura $x = -\frac{a^2 d\zeta}{dx(1+\zeta\zeta)^{\frac{1}{2}}}$, dont l'intégrale eſt $\frac{\zeta}{\sqrt{(1+\zeta\zeta)}} = C - \frac{x^2}{2a^2}$; en ſorte que faiſant ω égal à l'angle dont ζ ou $\frac{dy}{dx}$ eſt la tangente, on aura ſin. $\omega = C - \frac{x^2}{2a^2}$ & $C =$ ſin Ω, Ω étant l'angle initial MAQ.

46. Nous avons déja fait voir (art. 18) que l'angle initial MAQ doit être ſuppoſé droit. Mais en le ſuppoſant d'ailleurs tout ce qu'on voudra, n'eſt-ce pas une ſuppoſition purement précaire, que la tangente en B ſoit parallèle aux x, c'eſt-à-dire, horiſontale, & que par conſéquent l'angle DBM ſoit droit? Ne pour-

roit-il pas être aigu? Cela paroît d'autant plus naturel à ſuppoſer, que certainement l'angle QMA au point M (pris à volonté) eſt aigu, & qu'il ſemble qu'on pourroit ſuppoſer le reſſort fixément attaché en M, & tendu par le poids P, en ſuppoſant la portion BM ſupprimée, & tout le reſte demeurant le même.

47. On dira peut-être, pour réformer cette ſuppoſition, que la conſtante doit ſe déterminer par la condition que la verticale AP touche la courbe BMA, ce qui donnera $z=\infty$ lorſque $x=0$, & $C=1$. Mais en ce cas, on trouveroit, comme il eſt aiſé de le voir, $dy^2=\frac{dx^2\left(1-\frac{x^2}{2a^2}\right)^2}{1-\left(1-\frac{x^2}{2a^2}\right)^2}$, & lorſque $x=0$, on auroit $dy^2=\frac{a^2dx^2}{x^2}$, & $dy=\frac{adx}{x}$; d'où il s'enſuit, comme je l'ai démontré ailleurs (*a*), que la courbe BMA deviendroit alors une ligne droite dans la direction AP du poids P, c'eſt-à-dire, que la courbe BMA & la ligne AP doivent coincider avec la verticale BD qui paſſe par le point fixe B, réſultat contraire encore à l'expérience, & d'où il s'enſuivroit que le reſſort BMA, fixé d'abord horiſontalement, doit être fléchi par le poids P, (quelque petit qu'on ſuppoſe ce poids) à une ſituation rectiligne & verticale ſuivant BD.

48. On peut démontrer la même choſe par l'équa-

(*a*) Voyez *Mém. Acad.* 1767, pag. 581; & 1769, pag. 84 & 120.

tion $s = f \log. \left(\frac{\sqrt{(1-\text{cof. } z)}}{\sqrt{(1+\text{cof. } z)}}\right) + A$, que trouve M. de la Grange dans ſa ſavante Théorie des reſſorts (Mém. de Berlin, 1769, pag. 174), en ſuppoſant que la force qui tend le reſſort ſoit tangente en A, car cette équation donnera $\frac{s-A}{f} = \log. \left[\sqrt{\left(\frac{1-\text{cof. } z}{1+\text{cof. } z}\right)}\right]$, & $\frac{1-\text{cof. } z}{1+\text{cof. } z} = c^{2\left(\frac{s-A}{f}\right)}$, c étant le nombre dont le log. = 1. Or en faiſant $z = 0$ & $s = 0$, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que la force tendante ſoit une force tangentielle en A, on aura $o = c^{-\frac{2A}{f}}$, & par conſéquent A infinie, donc en faiſant s finie & quelconque, mais très-petite par rapport à l'infinie A, on aura de même $c^{2\left(\frac{s-A}{f}\right)} = c^{-\frac{2A}{f}} = 0$; donc $1 - \text{cof. } z = 0$; donc cof. $z = 1$, & $z = 0$; donc ſi l'arc $s = 0$ lorſque $z = 0$, s ſera tout ce qu'on voudra en ſuppoſant $z = 0$; donc la courbe BMA devient une ligne droite.

49. M. Jacques Bernoulli, dans les Mém. de l'Acad. 1705, ſuppoſe la courbe autrement diſpoſée, & telle qu'on la voit dans la Fig. 5, & il parvient à une équation de cette forme, $dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{(B-x^4)}}$, où l'on voit que $x = 0$, donne ſelon lui $dy = 0$, & qu'ainſi l'angle MAP eſt droit.

50. Cette équation viendroit évidemment de l'équation différentielle $x = \frac{a^2 dz}{dx(1+zz)^{\frac{1}{2}}}$, qui convient à ce

dernier cas. Mais pourquoi ſuppoſer que l'angle MAP eſt droit ? l'expérience ne prouve-t-elle pas le contraire, & n'avons-nous pas même prouvé (art. 18) que cet angle doit être $= 0$?

51. Il paroît s'enſuivre de-là que le problême des courbes élaſtiques (en partant des ſuppoſitions phyſiques reçues, & que nous avons examinées plus haut) eſt indéterminé, & qu'un même poids P peut par ſa tenſion former différentes courbes élaſtiques, depuis celle où la tangente en B eſt horiſontale, juſqu'à la ligne droite BD. Il ſemble pourtant, d'après l'expérience, que ce problême n'a qu'une ſeule ſolution pour une lame d'élaſticité donnée, de ſorte que l'expérience d'une part, & de l'autre la ſolution adoptée juſqu'ici, ſemblent peu d'accord.

52. C'eſt ce qui paroîtra encore plus clair, ſi on ſuppoſe que la courbe élaſtique s'écarte peu de la ligne droite, car on aura pour lors $x =$ à très-peu près $\frac{ddy}{dx^2} \cdot \frac{a^2}{b^2}$ ou $\frac{x\,dx^2}{a^2} = -ddy$, d'où $dy = \frac{b^2\,dx}{a^2} - \frac{x\,x\,dx}{2a^2}$; a étant ſuppoſé très-grand par rapport à b, & par rapport à la plus grande valeur de x, qui eſt à peu près $= l$, afin que y ſoit très-petit par rapport à x, & qu'ainſi la courbe élaſtique, ſelon l'hypothèſe, différe peu de la ligne droite.

53. Or il eſt évident qu'en changeant la valeur de b (toujours ſuppoſée très-petite par rapport à a) l'équa-

tion $ddy = -\frac{x\,dx^2}{a^2}$ subſiſte toujours, & que par conſéquent une infinité de courbes élaſtiques différentes, déterminées par la différente valeur de b, peuvent ſatisfaire à cette équation.

54. On peut encore remarquer que, ſi pluſieurs reſſorts (Fig. 6) OZA, OiA, dont l'élaſticité ſoit la même, & qui ſoient tous fixes en A, ſont tendus par un même poids P, dont la direction paſſe par A, & qu'ils ſoient de plus chacun très-peu courbés, tous ces reſſorts ſeront en équilibre avec le poids P, pourvu que $\frac{ZM}{iM}$ ſoit par-tout conſtant; car ſi dans une de ces courbes OZA, on a $y = -\frac{a^2\,ddy}{dx^2}$, ($OM$ étant $= x$, & $ZM = y$) on aura la même équation pour la courbe OiA, puiſque $\frac{ddy}{y}$ y eſt la même que dans la courbe OZA.

55. Cette équation $y = -\frac{a^2\,ddy}{dx^2}$ donne $y = A$ ſin. $\left(\frac{x}{a}\right)$, A étant une conſtante qui détermine les différentes courbes OZA, OiA, &c comme OA eſt $=$ à très-peu près à la longueur totale du reſſort l, il s'enſuit que $\frac{l}{a}$ doit être égal à la demi-circonférence priſe un nombre entier de fois, exactement.

56. Sans cette condition, la direction du poids P

ne paſſera pas par le point fixe A, comme nous le ſuppoſons ici.

57. Si $\frac{l}{a}$ eſt $< \pi$, π étant la demi-circonférence, ou plutôt le rapport de la demi-circonférence au rayon, la ligne OP tombera dans la figure à droite du point A.

58. Si $\frac{l}{a} = m\pi$, m étant un nombre pair ou impair, la direction du poids P paſſera par A, & la courbe du reſſort formera pluſieurs ventres en nombre m, & coupera ſon axe OP en $m - 1$ points, outre les points O, A.

59. Si $\frac{l}{a} = m\pi + u$, u étant $< \pi$, & m un nombre pair ou impair, (zero étant compris parmi les nombres pairs) la courbe du reſſort aura m ventres, & coupera ſon axe en $m - 1$ points comme dans le cas précédent, mais la direction du poids P ne paſſera point par A, & tombera à droite du point A ſi m eſt pair, & à gauche ſi m eſt impair.

60. Mais dans tous les cas, comme dans le cas le plus ſimple de la Fig. 6, le reſſort pourra prendre différentes figures.

61. Quant à la quantité a, on la déterminera dans tous les cas par l'équation $\frac{l'}{a} = \pi$, l' étant la valeur de x qui répond au point le plus proche de O où la courbe coupe ſon axe; point qui ſe trouvera par l'expérience.

62. Et ſi la courbe ne coupe pas ſon axe, alors ſoit λ la valeur de x qui répond à la plus grande valeur de y, on aura $\frac{\lambda}{a} = \frac{*}{*}$, équation par laquelle on déterminera a. Ceci ſuppoſe que $\frac{dy}{dx}$ ſoit $= 0$ en quelque point de la courbe. S'il ne l'étoit pas, alors on déterminera A & a par l'obſervation des angles en O & en A, dont les tangentes étant ſuppoſées $= m$, & m' donneront lorſque $x = 0$, $\frac{dy}{dx}$, ou $m = \frac{A}{a}$ cof. $\frac{o}{a} = \frac{A}{a}$, & lorſque $x = \lambda$, m' ou $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{a}$ cof. $\frac{\lambda}{a}$. Donc cof. $\left(\frac{\lambda}{a}\right) = \frac{m'}{m}$, d'où l'on tirera a; & par conſéquent $A = am$.

63. J'ai cru devoir entrer dans ce détail, parce que de très-grands Géometres paroiſſent avoir penſé que ſi $\frac{\lambda}{a}$ n'eſt pas $= \pi$, il n'eſt pas poſſible, même dans les principes admis juſqu'à préſent ſur l'action des reſſorts, de déterminer la courbe élaſtique par le cas dont il s'agit; ils ont, ce me ſemble, ſuppoſé que la direction OP du poids P devoit toujours paſſer par le point fixe A; ſuppoſition qui ne me paroît pas néceſſaire.

64. Je reviens encore un moment à la ſolution générale de l'art. 43, d'après les principes ordinaires. Pour ſe former une idée plus nette de la quantité a, on ſuppoſera $Px = \frac{Ka^{\lambda}}{R}$, R étant le rayon oſculateur,

&

& $K\alpha^2$, une quantité conſtante, dans laquelle K repréſente un poids pris à volonté, & α une ligne droite, en ſorte que K diminuant, α augmentera & réciproquement, & que ſi on ſuppoſe $K = P$, α ſera $= a$.

65. Maintenant, en ſuppoſant $AM = s$ (Fig. 1), & $dx = ds$ cof. ω, c'eſt-à-dire que ω ſoit l'angle des ds avec les dx, on aura $\frac{ds}{R} = -d\omega$, d'où le rayon oſculateur $R = -\frac{ds}{d\omega}$, & l'équation $\int ds$ cof. $\omega = -\frac{a^2 d\omega}{ds}$; donc faiſant ds conſtant, on aura ds ſin. $\omega = -\frac{a^2 dd\omega}{ds}$, & (ſuppoſant $ds = r d\omega$) dx cof. $\omega = \frac{a^2 dr}{r^2}$; donc ſin. α — ſin. $\omega = \frac{a^2}{2r^2}$, α étant la valeur de ω lorſque $s = 0$, & r étant $= \infty$ lorſque $s = 0$, puiſque l'équation $\int ds$ cof. ω ou $x = -\frac{a^2 d\omega}{ds}$, donne $\frac{d\omega}{ds}$ ou $\frac{x}{r} = 0$ lorſque x & s ſont $= 0$. Donc $ds = -\frac{a d\omega}{\sqrt{2}.\sqrt{(\text{ſin. } \alpha - \text{ſin. } \omega)}}$; équation dont l'intégration dépend de la rectification des ſections coniques.

66. Si ω eſt fort petit, ainſi que α, ſoit ſin. $\omega = x$, & ſin $\alpha = b$, on aura $ds = -\frac{a dx}{\sqrt{2}.\sqrt{(1-xx)}.\sqrt{(b-x)}}$; & comme x eſt très-petit par rapport à 1, on peut, au lieu de $\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, mettre $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8}$, &c. ce qui rendra l'intégration très-facile.

67. Suppoſons $ds =$ à très peu près $-\frac{a\,dx}{\sqrt{2}.\sqrt{(b-x)}}$; on aura l'intégrale $s = -\frac{2a}{\sqrt{2}} \times [\sqrt{(b-x)}]$, & au point B où $s = l$, & où l'angle $x = 0$, (art. 43) d'après la ſuppoſition admiſe dans les ſolutions ordinaires, on aura $l = \frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$; ce qui donne $b = \frac{l^2}{2a^2}$.

68. Suppoſons $\alpha = 90^0 - \zeta$, ζ étant une quantité fort petite, & $\omega = 90^0 - \zeta$, ζ étant auſſi une quantité fort petite, nous aurons ſin. $\omega =$ cof. $\zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{2.3.4}$, &c; & de même ſin. $\omega =$ cof. $\zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{2.3.4}$, &c. d'où $ds =$ à très-peu près $-\frac{a\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-\zeta^2)}}$; donc $\frac{\zeta}{\zeta} =$ cof. $\left(\frac{s}{a}\right)$, & ζ ou $\frac{dy}{ds} = \zeta$ cof. $\frac{s}{a}$, ou enfin $y = a\zeta$ ſin. $\left(\frac{s}{a}\right)$, ce qui s'accorde avec l'art. 55.

69. Dans la Fig. 6 on aura de même fds cof. $\omega = \frac{a^2\,d\omega}{x\,dx}$, équation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que le ſecond membre a le ſigne $+$, parce qu'ici l'abſciſſe x proportionnelle à $\frac{1}{R}$ étant repréſentée par ZM, ω croît avec s, au lieu qu'il décroît dans la Fig. 1, donc $d\omega$ cof. $\omega = -\frac{a^2\,ds}{x^2}$, & ſin. ω — ſin. $\alpha =$

$\frac{x^2}{2a^2}$; d'où $ds = \frac{a\,d\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{(\cos\alpha - \sin\alpha)}}$; équation intégrable auſſi par des arcs de ſections coniques, ainſi que celle de l'art. 65. Ces deux équations donnent non la conſtruction, mais la rectification de l'élaſtique, qu'on peut trouver auſſi d'une autre maniere par l'équation de l'art. 45, $\frac{1}{\sqrt{(1+zz)}} = c - \frac{x^2}{2a^2}$, ou $\frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = c - \frac{x^2}{2a^2}$, qui donne (en faiſant $\frac{1}{2a^2} = C$) $dy^2 = \frac{(c-Cx^2)^2\,dx^2}{1-(c-Cx^2)^2}$; & $dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2}{1-(c-Cx^2)^2}$; ou $ds = \frac{dx}{\sqrt{[1-(c-Cx^2)^2]}}$, quantité qui s'intégre par des arcs de ſections coniques.

70. Je ne donne pas les ſolutions précédentes pour exactes, puiſqu'elles ſont appuyées ſur des principes concernant l'action des reſſorts, que j'ai révoqués en doute au commencement de ce Mémoire. Mais j'ai cru devoir montrer que, même en admettant ces principes, les ſolutions du problême de l'élaſtique, données juſqu'à préſent, laiſſoient encore à deſirer, puiſqu'elles laiſſent ou ſemblent laiſſer le problême indéterminé, & ſuſceptible d'une infinité de ſolutions.

71. Je dois prévenir encore une réponſe qu'on pourroit oppoſer aux obſervations que nous avons faites, art. 43 & 46, ſur *l'indétermination* du problême de la courbe élaſtique, par les méthodes adoptées juſqu'ici; on pourroit dire que dans la Fig. 1, la tangente en

B doit être horiſontale, parce que le reſſort ne doit céder à l'action du poids P, que le moins qu'il eſt poſſible, & par conſéquent s'écarter le moins qu'il eſt poſſible de la ſituation horiſontale, ce qui arrivera ſi l'angle DBA eſt droit. En effet, ſi l'angle DBA étoit aigu, il eſt clair que le reſſort BMA ſeroit plus fléchi par le poids P, & plus écarté par conſéquent de la ſituation horiſontale. On peut ajouter que, ſi on regarde le point M comme fixe, le reſſort ou partie de reſſort MA ne changera pas à la vérité de ſituation, & que la tangente en M reſtera inclinée, & l'angle QMA aigu, mais que, ſi le poids P n'avoit eu d'abord à plier que la partie MA, la tangente en M eut été horiſontale, & l'angle QMA droit.

72. En admettant cette hypothèſe, qui pourtant ne paroît pas fondée ſur une raiſon ſolide, il faudra dire par la même raiſon, que dans la Fig. 5 la tangente en B doit être verticale, afin que le reſſort s'écarte le moins qu'il eſt poſſible de ſa ſituation verticale primitive.

73. Or il eſt aiſé de voir par la théorie précédente, qu'il y a une infinité de cas où la tangente en B ne ſauroit être verticale, puiſque par exemple, ſi la courbe BMA differe peu d'une ligne droite, il faut (art. 55) pour que la tangente en B ſoit verticale, que ſin. $\frac{x}{a}$ ou ſin. $\frac{l}{a}$ (l étant la longueur du reſſort) ſoit =

au ſinus total, & qu'ainſi $\frac{l}{a} = \frac{\pi}{2}$, or comme la quantité a dépend de la force du reſſort, & que l en marque la longueur, il eſt clair que cette équation ne peut avoir lieu en général, mais ſeulement dans quelques cas particuliers.

74. On pourroit cependant obſerver encore, 1°. que dans le cas dont il s'agit, ſi le reſſort eſt d'abord ſuppoſé verticalement placé, ſuivant OA (Fig. 6), & preſſé par le poids P, il eſt impoſſible qu'il fléchiſſe, & qu'ainſi il ne peut ſe courber que dans la ſuppoſition que ce reſſort ſoit d'abord un peu écarté de la verticale en $O'A$. 2°. On peut ſuppoſer que dans ce cas il ſe fléchira de maniere que la partie ou côté infiniment petit qui eſt en A, ne change point de poſition & faſſe toujours avec la verticale OA, un angle $= OAO'$, afin que le reſſort ſoit le moins fléchi qu'il eſt poſſible par l'action du poids P; en ce cas, comme on auroit toujours (art. 55) $y = A$ ſin. $\frac{x}{a}$, & au point A, $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{a}$ cof. $\left(\frac{l}{a}\right)$, que de plus $\frac{l}{a}$ eſt connue par la longueur & la force du reſſort, on aura la valeur de A par l'angle donné OAO'. Voilà, ce me ſemble, tout ce que la théorie juſqu'à préſent admiſe, nous permet de ſuppoſer ſur ce ſujet. Ajoutons, que de toutes les figures que le reſſort peut prendre en ce cas, celle dont il s'agit ici eſt celle qui réſulte le plus directement de la poſition initiale AO' qu'on ſuppoſe

au reſſort ; & obſervons que ſi $\frac{t}{a}$ eſt $> \pi$, la courbe en ce cas aura des noeuds, comme on l'a vu ci-deſſus ; mais que le petit côté initial en A, conſervera toujours ſa ſituation primitive ſuivant AO'. Il faut pourtant obſerver encore que, la ſituation primitive AO' du reſſort étant donnée, la diſtance du point O' à la verticale (après la flexion du reſſort), eſt néceſſairement déterminée, puiſque cette diſtance $= A$ ſin. $\left(\frac{t}{a}\right)$, & que A eſt déja donnée (*hyp.*) par l'angle OAO'. Mais il eſt clair qu'en agrandiſſant l'angle OAO', on agrandira la quantité A, & par conſéquent la diſtance dont il s'agit, & qu'ainſi la moindre flexion poſſible du reſſort exige que l'angle primitif OAO' reſte le même.

75. Cette théorie, ou plutôt ces réflexions ſur les courbes élaſtiques & ſur l'action des reſſorts peuvent conduire à d'autres obſervations ou queſtions ſur le même ſujet. On peut demander, par exemple, ſi un reſſort ABC entiérement libre, & non attaché par aucun de ſes points, peut (Fig. 7) être tendu par deux poids placés en A & en B (la ligne AB étant horiſontale), & dans cet état reſter en repos? Il ſemble que rien n'en empêche, car il paroît bien clair que, ſi le reſſort ABC étoit ſur un plan horiſontal, & tendu en A & en B par deux puiſſances perpendiculaires à AB, il pourroit être en équilibre, or, tout reſtant dans le même

état, on peut ſubſtituer à ces puiſſances deux poids équivalens, attachés à des cordes horiſontales qui paſſent ſur des poulies ; maintenant ſi le ſyſtême total du reſſort & des poids eſt ſuppoſé vertical, il paroît évident que l'équilibre doit ſubſiſter. Voilà donc un corps ABC placé verticalement, & en cet état tendu par deux poids, qui ſe ſoutient ſans aucun appui. Eſpece de paradoxe phyſique, qui pourtant au fond ne l'eſt pas autant qu'on pourroit le croire. Dans ce cas, & en ſuivant la théorie ordinaire, la courbe $AMCB$ devroit néceſſairement être un cercle, ſi les poids appliqués en A, B étoient égaux ; car on auroit ſuivant cette théorie $A \times AP + B \times BP = \frac{C}{R}$ ou $A \times AB = \frac{C}{R}$; donc R ſeroit conſtant. Donc, &c. Cette queſtion mérite, ce me ſemble, d'être examinée par les Géometres, la ſolution pourroit conduire à des réſultats curieux.

76. Si un reſſort $AECDB$ eſt tendu par une corde AB (Fig. 8), il paroît abſolument néceſſaire que la corde AB touche la courbe $AECDB$ en A & en B, car il eſt clair que les forces qui bandent le reſſort en A & en B ſont dirigées ſuivant AB & BA ; il eſt clair de plus qu'en ſuppoſant le reſſort inflexible, & conſervant d'ailleurs toutes les forces qui tendent à le rétablir, l'équilibre ſubſiſtera ; donc la ſomme des forces verticales du reſſort, perpendiculairement à AB,

doit être nulle, ce qui exige que ces forces ſoient dirigées les unes en haut dans la partie DCE, les autres en bas dans les parties EA, DB, or cela ne peut ſe faire à moins que les angles en A & en B ne ſoient infiniment obtus, & que la courbe n'ait la figure de l'art. 34. Cependant l'expérience paroît prouver que les angles CAB, CBA (Fig. 7) ſont ſouvent aigus. Comment accorder cela avec la théorie? & ſi l'on vouloit que les forces perpendiculaires à AB fuſſent nulles, & qu'il n'y eût abſolument que les forces parallèles à AB, il eſt clair que les forces du reſſort en A & en B ſeroient égales aux forces tendantes en A & en B, & qu'ainſi les autres forces devroient être nulles; autrement les forces parallèles à AB, qui agiroient infiniment près de A & de B, produiroient, comme il eſt aiſé de le voir (dans la direction des tangentes en A & en B, faiſant (*hyp.*) un angle fini avec AB) une force infinie, qui ne ſeroit détruite par aucune autre.

77. En un mot, il s'agit d'expliquer clairement comment un reſſort ACB tendu par une corde AB, eſt en équilibre ſi les angles CAB, CBA ſont aigus? Si on ſuppoſe, ce qui eſt le plus vraiſemblable, que la force du reſſort en B eſt dirigée ſuivant BV perpendiculaire à la courbe CB, alors les deux forces ſuivant BV & ſuivant BA, produiront une force ſuivant BK tangente en B, & il ſera aiſé de voir par la décompoſition, que cette force agiſſant le long de la courbe,

produira,

produira, 1°. une force qui dans tous les points ſera tangente de la courbe, & ſera anéantie au point le plus élevé *C* par une force égale & contraire; 2°. une force qui agira à chaque point perpendiculairement à la courbe de dedans en dehors, c'eſt-à-dire, dans la direction *bm*, par exemple, au point *b*, force qui devroit produire l'effet de mouvoir le point *b* (& ainſi des autres) vers *m*, puiſque cette force n'eſt contrebalancée par aucune autre, & que la force même du reſſort agit dans le même ſens; ſans compter que ces forces (tant celles ſuivant *bm*, que celle du reſſort dans le même ſens) qui agiroient ainſi en *b* & dans tous les autres points de la courbe, ſeroient infiniment petites par rapport à la force finie qui agiroit en *B*. Maintenant ſi la force qui agit en *B*, au lieu d'être dirigée ſuivant *BV*, l'étoit ſuivant *BO*, par exemple, en ſorte que la réſultante de cette force & de la force de la corde ſuivant *BA* fût dirigée en ſens contraire à *bk*, alors la force en *b*, comme il eſt aiſé de le voir, ſeroit dirigée dans le ſens contraire à *bm* & pourroit être anéantie par la force du reſſort au même point; mais, 1°. on ne conçoit pas, ce me ſemble, aiſément comment la force en *B* ſeroit dirigée ſuivant une autre ligne que *BV* perpendiculaire à la courbe *ACB*, car en regardant le reſſort *ACB*, comme une ſuite de petites lignes droites unies par des charnieres, toutes ces petites lignes droites tendent à ſe remettre dans la ſituation rectiligne par un mouvement de rotation autour

de ces charnieres, & par conſéquent perpendiculaire à chaque point de la courbe. 2°. La difficulté tirée du rapport infiniment petit des forces en b perpendiculaires à la courbe, à la force en B, ſuivant BO ou BV, reſtera la même dans ce cas, que dans le précédent. Les mêmes difficultés ont lieu ici, que pour un reſſort BA tendu (Fig. 1) par un poids P, ſoit que le point B où le reſſort eſt fixé, ſoit plus haut ou plus bas que le point A ou eſt attaché le poids P. Il ne paroît pas poſſible dans tous ces cas d'expliquer l'équilibre & la tenſion du reſſort d'une maniere ſatisfaiſante, ſi on ne ſuppoſe que le reſſort eſt tangent a la direction du poids. Ce qui d'un autre côté ne paroit pas s'accorder avec l'expérience. Faudroit-il, pour expliquer ce fait, en revenir à l'idée que j'ai propoſée dans le Tome I de mes *Opuſcules*, Ier Mémoire, pag. 13, qu'on peut regarder un corps élaſtique comme étant en partie roide & en partie flexible, & participant, pour ainſi dire, à-la fois de la nature du fil & de celle du levier. En ce cas on pourroit expliquer comment les angles CAB, CBA, ſeroient aigus; encore faudroit il ſuppoſer que les forces qui tendent à rétablir le reſſort ſont dirigées parallèlement à AB, & non perpendiculairement à la courbe ACB, puiſqu'il réſulteroit de cette ſuppoſition des forces perpendiculaires à AB, & agiſſant toutes dans le même ſens, leſquelles ne ſeroient détruites par aucune autre (*a*)

(*a*) Voyez l'*Appendice* à la fin de ce Volume

78. Voici encore quelques autres queſtions. Soient deux reſſorts rectilignes BA, CA, unis (Fig. 9) enſemble par une charniere en A, & qui tendent à ſe remettre en ligne droite, on demande la loi ſuivant laquelle ils ſe mouvront? Il ne faut pas croire que le point A ſoit en repos, car la ſeule action des points B, C, & des autres, pour tourner autour de A, produit une force centrifuge qui tend à tirer le point A ſuivant AC & ſuivant AB, & par conſéquent a le faire avancer en ligne droite ſuivant AR. On pourroit croire d'abord que le mouvement du point A ſuivant AR, peut être déterminé ſéparément du mouvement rotatoire. Mais il eſt aiſé de démontrer par mon principe de Dynamique, que ſi une force eſt appliquée en A ſuivant AR, elle produira non-ſeulement un mouvement rectiligne parallèlement à AR dans tous les points des verges BA, AC, mais encore un mouvement rotatoire des verges BA, CA autour de A. Ainſi on ne peut ſéparer la conſidération & l'analyſe des deux mouvemens, qu'on déterminera d'ailleurs par ce même principe de Dynamique.

79. En ſuppoſant dans ce même cas l'angle BAC infiniment obtus, on demande ſi la force rotatoire eſt meſurée par l'angle OAC, complément de BAC, ou par l'angle CAF, formé par la ligne AC, & la ligne DAF perpendiculaire à AR, & dont les reſſorts AC, AB tendent à ſe rapprocher? Il me ſemble qu'il doit être meſuré par l'angle OAC, puiſque c'eſt à cauſe

de cet angle que les reſſorts BA, AC font effort pour ſe remettre en ligne droite. Il paroît même naturel de ſuppoſer que l'effort eſt proportionnel à cet angle, ſi l'angle eſt peu conſidérable. Cependant on peut en général le ſuppoſer proportionnel à une puiſſance de cet angle, & cette ſuppoſition ſera exacte lorſque l'angle eſt très-petit, car l'effort eſt en général proportionnel à une fonction de l'angle (en faiſant entrer, ſi l'on veut, le ſinus dans cette fonction), or la fonction $\varphi\alpha$ d'une quantité quelconque, eſt $= A\alpha^n$, lorſque la quantité α eſt très-petite.

80. Si le reſſort BAC eſt libre, les côtés BA, AC tendent également (Fig. 10) à ſe rapprocher l'un de l'autre. Mais ſi le reſſort AB eſt fixément attaché en B, alors le point B ne pouvant avoir de mouvement, il paroît que le ſeul reſſort AC tend à ſe rapprocher en ligne droite de BA.

81. Mais s'il y a trois reſſorts ou un plus grand nombre BA, AC, CD, le point B (Fig. 11) étant toujours fixe, je demande ſi le reſſort AC tend à ſe rapprocher du reſſort CD, comme il tend à ſe rapprocher de AB. Il paroît que AC ne pourroit tendre à ſe remettre en ligne droite avec CD, ſans rendre plus aigu l'angle BAC. En ce cas les points D, C, A, n'auroient de tendance à la rotation qu'autour des points C, A, B, qui ſont à leur gauche, & le point A, ainſi que les autres points intermédiaires à B & à D, n'auroient point de tendance à ſe mouvoir autour de C, &

des autres points placés à leur droite ; de maniere que le reſſort ACD ne tendroit à ſe rétablir que par la rotation de D autour de C, & non de A autour de C, & ainſi des autres ; ce qui paroîtroit contraire au principe aſſez généralement admis, qu'un reſſort tend à ſe débander en tout ſens, & que les côtés contigus AC, CB, &c. infiniment petits ou non, tendent également à ſe remettre en ligne droite l'un avec l'autre ; principe qui peut-être n'eſt vrai, que pour les reſſorts entierement libres, & qui ne ſemble pas avoir lieu dans les reſſorts rectilignes fixes par leur extrémité, leſquels ſe débandent uniquement par l'extrémité oppoſée à ce point fixe, & ſe débanderoient par les deux extrémités, s'ils étoient libres.

82. Je ferai à cette occaſion une remarque ſur le mouvement de ces ſortes de reſſorts, dans les deux cas. Soit un reſſort rectiligne AB (Fig. 12), fixe en A, & dont la longueur naturelle ſoit AB, imaginons que ce reſſort ſoit contracté en AC, & que la force dilatative ou reſtitutive ſoit proportionnelle à la quantité de la contraction, il eſt clair qu'en nommant CV, x, & CB, α, on aura $ddx = A(\alpha - x)dt^2$ équation facile à intégrer. Suppoſons préſentement que le reſſort ſe débande des deux côtés, & que chaque extrémité ait parcouru l'eſpace z au bout du temps t, alors l'équation ſera $ddz = A(\alpha - 2z)dt^2$, qui donne une intégrale différente de la précédente. Ainſi le mouvement d'un reſſort rectiligne eſt différent lorſqu'il eſt entierement

libre, & lorſqu'il eſt fixe par un de ſes bouts. On auroit, ce me ſemble, pu croire le contraire, & imaginer que le mouvement eſt le même dans les deux cas, parce que dans les deux cas la force reſtitutive eſt la même à longueur égale du reſſort.

83. La plupart des queſtions que j'ai diſcutées dans cet écrit ſont (je le répete encore) plutôt des doutes propoſés aux Mathématiciens, que des aſſertions poſitives. Je me croirois récompenſé de mon travail & de mes réflexions ſur ce ſujet, ſi elles engagent les Géometres à chercher une théorie de la flexion des reſſorts & de la courbe élaſtique, qui ne ſoit ſujette à aucune difficulté.

§. II.

Sur le Calcul des Probabilités.

1. JE demande pardon aux Géometres de revenir encore ſur ce ſujet. Mais j'avoue que plus j'y ai penſé, plus je me ſuis confirmé dans mes doutes ſur les principes de la théorie ordinaire; je deſire qu'on éclairciſſe ces doutes, & que cette théorie, ſoit qu'on y change quelques principes, ſoit qu'on la conſerve telle qu'elle eſt, ſoit du moins expoſée déſormais de maniere à ne plus laiſſer aucun nuage.

2. Je ſuppoſe qu'il y ait n manieres différentes d'amener *croix*, & n manieres différentes d'amener *pile*, j'amene *croix* au premier coup, eſt-il vraiſemblable que l'impulſion qui me donnera encore *croix* au ſecond coup, ſera *préciſément* la même, que celle qui me l'avoit donné au premier coup? Il me ſemble que non. Or en ce cas, il n'y aura plus que $n-1$ manieres d'amener *croix* au ſecond coup, tandis qu'il y en a encore n d'amener *pile* à ce ſecond coup. Il y a donc déja un peu plus de probabilité pour *pile* au ſecond coup, que pour *croix*.

3. Ce raiſonnement devient encore plus fort ſi l'on a amené *croix* pluſieurs fois de ſuite. On dira peut-être que le nombre n eſt infini, tant pour *croix* que pour *pile*, & qu'ainſi $n-m$ (m étant fini) eſt cenſé toujours

$= n$. Il n'en ſera pas moins vrai, ce me ſemble, que plus le nombre m de coups ſera grand, plus il ſera vraiſemblable que le coup qui doit ſuivre, ſe trouvera dans la *ſuite* qui n'a pas encore été entamée.

4. On objecte que, s'il eſt très-peu probable que *croix*, par exemple, n'arrive pas 20 fois de ſuite, c'eſt qu'il y a $2^{20} - 1$ combinaiſons où *croix* n'arrivera pas ainſi; & que par la même raiſon, s'il eſt peu probable que le même événement n'arrive pas 20 fois de ſuite, c'eſt qu'il y a $2^{20} - 1$ combinaiſons pour qu'il n'arrive pas. Mais ce peu de probabilité ne viendroit-il pas auſſi d'une autre raiſon, de ce qu'il y a dans la nature des cauſes continuellement agiſſantes, qui tendent à en changer l'état à chaque inſtant, & qui ne permettent pas que le même événement arrive un grand nombre de fois de ſuite, & même un aſſez petit nombre de fois? Ce raiſonnement a été développé par M. Beguelin dans les Mém. de Berlin de 1767.

5. On dit: *pile* & *croix en particulier* ſont également poſſibles. Donc pris *ſucceſſivement*, ils ſont auſſi également poſſibles. La conſéquence eſt-elle juſte? Il eſt bien certain que, *mathématiquement* parlant, un effet quelconque ne dépend pas de ceux qui l'ont précédé, & n'a aucune influence ſur ceux qui ſuivent, & que par cette raiſon on doit ſuppoſer, dans l'analyſe *mathématique*, tous les effets également poſſibles; mais *phyſiquement* parlant, cela eſt-il vrai, & l'expérience ne prouve-t-elle pas le contraire? C'eſt même ce qu'on ſuppoſe

ſuppoſe dans certains calculs des probabilités où l'expérience nous a ſuffiſamment éclairés. Il eſt poſſible, par exemple, mathématiquement & même à la rigueur phyſiquement parlant, que 100 perſonnes nées enſemble, & même bien conſtituées, parviennent toutes à la vieilleſſe, puiſque chacune en particulier peut y parvenir, & même l'eſpérer. Cependant comme l'expérience nous a appris le contraire, on fonde ſur cette expérience le calcul des probabilités de la durée de la vie, & celui des tontines & des rentes viageres. Or l'expérience nous apprend de même, ce me ſemble, que jamais un même événement n'arrive un grand nombre de fois de ſuite. Pourquoi donc n'y pas avoir égard dans le calcul des probabilités?

6. Suppoſons que 2^{100} joueurs jettent une piece en l'air 100 fois de ſuite; il faut, ou que dans deux de ces ſuites de 100 jets, *croix* & *pile* ſe trouvent chacun ſans mêlange, & ſoient par conſéquent arrivés 100 fois de ſuite, ou qu'il y ait au moins deux des autres ſuites de jets (où *croix* & *pile* ſe trouvent enſemble) qui ſoient repétées. Or je crois, comme je l'ai déja dit dans le Tome IV de ces *Opuſc.* pag. 299, qu'on peut parier ſans crainte que les deux ſuites où *croix* & *pile* ſe trouveroient ſans mêlange, n'auront pas lieu, & qu'ainſi il y aura une ou deux, au moins, des autres ſuites, qui ſe trouvera répétée deux ou pluſieurs fois.

7. Il ſemble que dans le problême de Peterſbourg, & dans la plûpart des autres, il y a quelqu'eſpece de

contradiction à ajouter enſemble les eſpérances partielles. En effet, ſi on ne doit gagner, par exemple, qu'au ſecond coup, il eſt clair qu'on n'aura point gagné au premier. On ne peut donc avoir à la-fois l'eſpérance de gagner au premier, & l'eſpérance de gagner au ſecond. Pour avoir l'eſpérance totale, faut-il donc ajouter les eſpérances partielles qui ſemblent s'exclure les unes les autres? Je ne veux pas conclure de-là que le réſultat de cette addition ne ſoit pas exact, voyez Tome IV, *Opuſc.* pag. 300, art. 18. Je dis ſeulement que ſur ce point la théorie s'énonce, au moins, d'une maniere obſcure & peu ſatisfaiſante.

8. Je ſuppoſe qu'on joue à *croix* & *pile* en deux coups, & qu'on doive jouer deux coups quoi qu'il arrive. La probabilité que *croix* arrivera au premier coup, eſt $\frac{1}{2}$; la probabilité que *croix* arrivera au ſecond, en ſuppoſant, comme on le fait ici, qu'on joue ce ſecond coup dans tous les cas, eſt encore $\frac{1}{2}$, au moins ſuivant la théorie commune. Donc ſuivant cette même théorie, la probabilité que *croix* arrivera, au moins une fois, en deux coups, eſt $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, c'eſt-à-dire eſt égale à la certitude que *croix* arrivera au premier coup. Or je demande ſi cela eſt vrai, ou du moins ſi un pareil réſultat, fondé ſur de pareils principes, eſt bien propre à ſatisfaire l'eſprit. Cette queſtion eſt d'autant plus naturelle, que dans le problême de Peterſbourg, la ſomme des probabilités $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, &c. à l'infini, eſt en effet égale à la certitude 1, c'eſt-à-dire, à la certitude 1 pour

limite, comme en effet cela doit être, puiſque plus on jouera de coups, plus il eſt probable & approchant de la certitude, que croix arrivera. Mais par cette raiſon même la ſomme des probabilités ne devroit pas être $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ dans le cas précédent, puiſque cette ſomme ne devroit pas être $= 1$.

9. Dans ce même problême de Peterſbourg, ſuppoſons que les écus promis par l'un des joueurs à l'autre, au lieu d'être croiſſans ſuivant la progreſſion 1, 2, 4, &c. ſoient décroiſſans ſuivant la proportion 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, &c. l'eſpérance, ſuivant la théorie commune, ſera $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ &c. $> \frac{1}{2}$. Or cette appréciation eſt-elle bien juſte? car ſi le jeu eſt en un ſeul coup, je ne dois donner que $\frac{1}{2}$ écu, parce que je ne puis gagner qu'un écu; dans le ſecond cas, où l'on ſuppoſe qu'on joue en pluſieurs coups, je ne dois & ne puis auſſi gagner qu'un écu; pourquoi donc cette différence de ſort?

Il eſt vrai que dans le ſecond cas je puis encore gagner quelque choſe au ſecond coup, & que dans le premier cas je ne puis rien gagner, puiſqu'il n'y a pas de ſecond coup. Mais enfin, ce que je pourrai gagner dans ce ſecond cas au ſecond coup, eſt bien moins qu'un écu, je n'ai jamais dans le cas le plus favorable, qu'un écu à eſpérer; & comme la quantité $\frac{1}{4}$ qu'on ajoute à l'eſpérance $\frac{1}{2}$ du premier coup, ſuppoſe que cette eſpérance ne ſera pas réaliſée, doit-elle y être ajoutée?

10. Suppoſons que dans le problême de Peterſbourg on joue en n coups, & que tout le reſte demeurant

le même, le joueur doive recevoir 2^{n-1} écus ſi *croix* n'arrive qu'au n^{e} coup, & rien ſi *croix* artive auparavant, ſon eſpérance & ſon enjeu, par conſéquent, ſera $\frac{1}{2}$, comme s'il ne jouoit qu'en un coup. Or cela eſt-il juſte? & y a-t-il un joueur qui voulut donner ſeulement un demi-écu, pour recevoir 2^{50} écus ſi *croix* n'arrivoit qu'au bout de 51 coups?

11. Dans le VIe Volume des *Savans Etrangers*, M. de la Place fait voir aiſément que ſi la piece a plus de penchant à tomber d'un côté que de l'autre, ſans qu'on ſache de quel côté (ſuppoſition très-plauſible), & qu'on joue en x coups, pour deux écus au premier, pour quatre au ſecond, pour huit au troiſiéme, &c. le joueur doit donner à ſon antagoniſte moins de x écus ſi $x<5$; x écus ſi $x=5$, & plus de x écus ſi $x>5$. Ainſi la ſuppoſition aſſez vraiſemblable, que la piece a plus de penchant à tomber d'un côté que de l'autre, exige que le joueur donne encore une plus grande ſomme, ſi $x>5$, que dans la ſolution ordinaire du problême de Peterſbourg. La difficulté eſt donc encore augmentée par cette ſuppoſition.

12. Mais en ſuppoſant même, comme on le fait dans tous ces jeux, que la piece ait un égal penchant à tomber des deux côtés, il eſt très-certain que perſonne ne voudroit donner 20 écus, & même au-deſſous, pour jouer à ce jeu; la difficulté ſubſiſte donc toujours ſans avoir encore, ce me ſemble, été bien réſolue, & elle ne paroît pas pouvoir l'être, tant qu'on s'en tiendra

uniquement aux principes reçus ſur le calcul des probabilités.

13. On a ſuppoſé dans l'article 11 précédent, que la piece jettée en l'air a néceſſairement plus de propenſion à tomber d'un côté que de l'autre; cette ſuppoſition, quoiqu'aſſez vraiſemblable, n'eſt cependant pas rigoureuſe, & il peut ſe faire abſolument que la piece ſoit conſtruite de maniere à tomber indifféremment de l'un ou de l'autre côté; & en général, ſuppoſons qu'il puiſſe y avoir tant de probabilités qu'on voudra, ω, $1-\omega$, ω', $1-\omega'$, &c. que *croix* viendra, ω', par exemple, étant $\frac{1}{2}$, ſi *croix* n'a pas plus de penchant à venir d'un côté que de l'autre, en ce cas la probabilité ou l'enjeu ſeroit, ſuivant les principes ordinaires, la ſomme des quantités ou ſéries $2\omega[1+2(1-\omega)+4(1-\omega)^2$ &c. $]+2(1-\omega)(1+2\omega+4\omega^2$ &c.$)+2\omega'[1+2(1-\omega')$ &c.$]$, le tout diviſé par m que je ſuppoſe être le nombre des probabilités ω, $1-\omega$, ω', $1-\omega'$, &c. en ſorte que ſi on nomme Ω la fonction $2\omega[1+2(1-\omega)$ &c.$]$, l'enjeu total ſera $\frac{\int \Omega d\omega}{m}$, depuis $\omega=0$, juſqu'à $\omega=1$. Mais la difficulté reſteroit toujours la même, & l'enjeu toujours infini, comme il eſt aiſé de le prouver, dans le cas où le nombre des coups ſeroit indéfini; & plus grand même après 5 coups, que ſi on ſuppoſoit $\omega=$ ſimplement $\frac{1}{2}$. En effet, puiſqu'en prenant ω quelconque depuis $\frac{1}{2}$ (excluſivement) juſqu'à 1, on a toujours l'enjeu plus petit

que le nombre n des coups ſi ce nombre eſt < 5, égal ſi ce nombre $= 5$, & plus grand ſi ce nombre eſt plus grand que 5, il eſt clair que regardant l'enjeu comme l'ordonnée d'une courbe dont $*$ eſt l'abſciſſe, & le paramette n, cette ordonnée ſera toujours $<$, ou $=$, ou $> n$, dans les cas qu'on vient de dire, & que, par conſéquent, l'aire totale de la courbe diviſée par l'abſciſſe totale correſpondante (c'eſt-à-dire, la vraie valeur de l'enjeu) donnera une quantité qui ſera $<$, ou $=$, ou $> n$.

14. Dans ce même problême de Peterſbourg, il y a à parier 1 contre 1 que je ne gagnerai qu'un écu; car *croix* peut venir au premier jet, & en ce cas le jeu eſt fini. Cependant, ſi on joue en 100 coups, par exemple, il faut que je donne 50 écus à l'autre joueur. Eſt-il poſſible qu'il y ait de l'égalité dans un pareil jeu, où il faut que je donne 50 écus, où il y a à parier 1 contre 1 que je ne gagnerai qu'un écu, &, ſuivant la théorie ordinaire, 63 contre 1 que je ne gagnerai que 32 écus, c'eſt-à-dire que je ne retirerai pas ma miſe? Ce ſeroit bien pis ſi on jouoit en 1000, 10000, &c. coups. Il eſt bien clair que la fortune plus ou moins grande du joueur ne fait rien ici, & qu'il n'y en a aucun qui voulût jouer un pareil jeu. On dira peut être que cette objection s'étendroit au cas où l'on ne joueroit qu'en deux coups, & où l'on devroit gagner 200 écus ſi *croix* n'arrivoit qu'au ſecond coup. Car on trouveroit l'eſpérance $= \frac{1}{2} + 50$ écus; & j'avoue que dans ce cas, & même dans le précédent, on devroit donner plus de

$\frac{1}{2}$ écu, quoiqu'il y ait à parier 1 contre 1 qu'on ne gagnera qu'un écu, parce qu'on peut ici gagner 200 écus dès le ſecond coup, & dans l'autre cas 2 écus au ſecond, 4 au troiſiéme, &c. mais il ne me paroît pas moins vrai que la théorie ordinaire a beſoin d'être ici éclaircie ou modifiée. Outre les raiſons apportées ci-deſſus, nous avons encore indiqué ailleurs une autre raiſon aſſez plauſible du défaut de cette théorie; c'eſt de regarder dans tous les cas *l'eſpérance* comme le produit de la ſomme eſpérée par la probabilité qu'on gagnera cette ſomme. Il nous paroît douteux que ce réſultat ſoit exact ſi la probabilité eſt fort petite, & que la probabilité $\frac{1}{5000}$ de gagner 5000 écus ſoit la même que la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner un écu, comme il réſulte des principes ordinaires. Dans ces principes, on appelle, ce me ſemble, mal-à propos *l'eſpérance* le produit de la *ſomme eſperée* par la probabilité; c'eſt la probabilité ſeule qui forme *l'eſpérance* véritable, & comme la *ſomme eſperée*, quelque grande qu'elle ſoit, n'augmente pas cette *probabilité*, il me ſemble qu'on ne doit pas multiplier cette ſomme par la probabilité, pour avoir ce qu'on nomme *l'eſperance* du joueur. En général, plus la probabilité de gagner eſt grande, plus le joueur doit donner à ſon adverſaire, & plus la ſomme qu'il eſpere eſt grande, plus auſſi il doit donner à ce même adverſaire, mais ce qu'il doit donner, doit-il être préciſément en raiſon directe de la ſomme eſpérée, & de la probabilité? C'eſt ce qu'on ſuppoſe dans l'ana-

lyſe des jeux, & ce qui ne me paroît pas inconteſtable.

15. Suppoſons que des caracteres jettés ſur un plancher donnent le mot *Conſtantinopolitanenſibus*, & qu'on demande à un ignorant ſi ces caracteres ont été jettés au haſard ou non, il répondroit qu'il y a toute apparence qu'ils ont été jettés au haſard. Mais ſi on faiſoit la même queſtion à quelqu'un qui connoîtroit l'exiſtence de *Conſtantinople*, & qui ſauroit la langue Latine, il répondroit au contraire qu'il y a tout à parier, & qu'il eſt même certain, que cet arrangement n'eſt pas l'effet du haſard. C'eſt que le premier ignore, & que le ſecond ſait que l'arrangement de ces caracteres eſt tel, qu'il a été, preſque ſûrement, l'ouvrage d'une cauſe intelligente. Il en eſt de même dans le jeu dont il s'agit. L'expérience & la connoiſſance que nous avons des loix de la nature, nous apprennent que le même événement n'arrive jamais un grand nombre de fois de ſuite; & c'eſt en vertu de cette *connoiſſance acquiſe*, que nous révoquons en doute la répétition de *croix* ou de *pile* un grand nombre de fois conſécutives. Comme tout eſt lié dans l'ordre des choſes, nous pourrions, ſi nous connoiſſions la loi de l'enchaînement des cauſes & des effets, deviner & prédire ce qui arrivera à chaque coup, ſi ce ſera *croix* ou *pile*, dans l'ignorance où nous ſommes du ſecret de la nature, nous ne pouvons dire préciſément ſi ce ſera *pile* ou *croix*; mais comme l'expérience nous a appris que le même effet ſe répete rarement, nous pouvons au moins, lorſque *croix* eſt

arrivé

arrivé pluſieurs fois de ſuite, conjecturer avec vraiſemblance que *pile* viendra. Nous ſuppoſons ici qu'il n'y a point de raiſon particuliere tirée de la conſtruction de la piece, pour faire arriver *croix* plutôt que *pile*; car ſi cela étoit, *croix* arrivant pluſieurs fois de ſuite, pourroit rendre probable que *croix* arrivera encore.

16. M. de Buffon, dans le Tome IV de ſes Supplémens à l'Hiſtoire Naturelle, croit que la probabilité doit être regardée comme nulle, quand elle eſt égale a celle qu'un homme bien portant mourra dans la journée, probabilité qu'il évalue à $\frac{1}{10000}$. En conſéquence la probabilité dans le problême de Peterſbourg ſeroit nulle, ſelon lui, après le treiziéme coup; car au treiziéme coup, la probabilité eſt $\frac{1}{2^{13}} = \frac{1}{8192}$, & au quatorziéme coup, elle eſt $< \frac{1}{10000}$. En ce cas, l'enjeu ne ſeroit que 6 à 7 écus, &, devroit même être encore diminué, parce que ſi la probabilité $\frac{1}{10000}$ doit être eſtimée $= 0$, les probabilités $\frac{1}{8192}$, $\frac{1}{4096}$, &c. doivent être eſtimées au-deſſous de leur valeur. Je ne prétends ni adopter, ni rejetter cette hypothèſe de M. de Buffon; je remarque ſeulement qu'elle confirme mes doutes ſur l'égalité de poſſibilité de tous les cas.

17. M. de Buffon dit encore qu'ayant fait jouer 2048 fois ce jeu de *croix* & *pile*, ce qui fait 2048 parties,

les 2048 parties ont produit en tout 10057 écus, ce qui fait, dit-il, à peu près 5 écus pour chaque partie, & c'eſt à cette ſomme qu'il borne l'enjeu. Cela ſuppoſeroit qu'on joue en 10 coups; & en ce cas le joueur pourroit rattraper ſa miſe, & au-delà, dès le quatriéme coup, puiſque ſi *croix* ne venoit qu'à ce quatriéme coup, il auroit 8 écus. Mais il perdroit, ſi *croix* venoit auparavant. C'eſt aux Mathématiciens à juger de ce réſultat, ſur lequel l'incertitude de la théorie m'empêche de prononcer.

18. Voyons maintenant ſi on ne trouveroit pas un réſultat plus conforme à la vérité, en ſuppoſant que tous les cas ne ſoient pas également poſſibles, & que lorſque *pile*, par exemple, eſt arrivé une ou pluſieurs fois de ſuite, il y a lieu d'eſpérer que *croix* viendra enſuite, plutôt que *pile*, au moins ſi la piece n'a pas plus de penchant à tomber d'un côté que de l'autre.

19. Suppoſons donc que, ſi *pile* eſt arrivé au premier coup, la probabilité que *croix* arrivera au ſecond ſoit $\frac{1+a}{2}$, au lieu de $\frac{1}{2}$, a étant une quantité très-petite; que ſi *pile* eſt arrivé les deux premiers coups, la probabilité que *croix* arrivera le troiſiéme coup, eſt $\frac{1+a+b}{2}$, & ainſi de ſuite, de maniere que $a+b+c+d$, &c. ne ſoit jamais $= 1$, afin que la probabilité ne devienne pas certitude abſolue. Cela poſé,

20 La probabilité que *croix* arrivera au premier coup, eſt $\frac{1}{2}$;

21. Celle qu'il n'arrivera qu'au ſecond coup, eſt le produit de $\frac{1}{2}$, probabilité que *pile* arrivera au premier coup, par $\frac{1+a}{2}$, probabilité que *croix* arrivera en ce cas au ſecond coup.

22. La probabilité que *pile* arrivera encore au ſecond coup eſt $\frac{1-a}{2}$, & par conſéquent la probabilité qu'il arrivera deux coups de ſuite eſt $\frac{1}{2}\times\frac{1-a}{2}$, d'où la probabilité que *croix* n'arrivera qu'au troiſiéme coup, eſt $\frac{1}{2}\times\frac{1-a}{2}\times\frac{1+a+b}{2}$.

23. Par la même raiſon la probabilité que *pile* arrivera encore au troiſiéme coup, eſt $\frac{1}{2}\times\frac{1-a}{2}\times\frac{1-a-b}{2}$, & celle que *croix* n'arrivera qu'au quatriéme coup, eſt $\frac{1}{2}\times\frac{1-a}{2}\times\frac{1-a-b}{2}\times\frac{1+a+b+c}{2}$.

24. Donc, puiſqu'on donne (*hyp.*) au premier coup 1 écu à Pierre, au ſecond 2, au troiſiéme 4, &c. dans l'hypothèſe du problême de Peterſbourg, l'enjeu de Pierre ſera $\frac{1}{2}[1+1+a+(1-a)(1+a+b)+(1-a)(1-a-b)(1+a+b+c)+\&c.]$

25. Donc pour un coup, l'enjeu ſera $\frac{1}{2}$; pour deux coups, l'enjeu ſera $\frac{1}{2}(2+a)$, pour trois coups, $\frac{1}{2}(3+a-aa+b-ba)$, &c.

26. Il eſt viſible que, comme on a au troiſiéme terme $(1-a)(1+a+b)=1-a^2+b-ba$, ce terme ſera

$>$ que le ſecond, ſi $b > \frac{a+a^2}{1-a}$, c'eſt-à-dire, ſi $b > a + 2a^2 + 2a^3 +$ &c. dans le cas contraire il ſera plus petit, & égal ſi $b = \frac{a+a^2}{1-a}$.

La valeur du premier terme de la ſuite eſt $\frac{1}{2}$, & elle va d'abord en augmentant, comme il eſt évident, ſa derniere valeur eſt évidemment $= 0$, parce que le facteur $1 - a - b - c - d - e - f$, &c. à l'infini $= 0$. Ainſi il y a un terme qui eſt le plus grand.

27. Mais comme chaque terme eſt poſitif (juſqu'au dernier à l'infini, qui eſt $= 0$), la ſomme des termes va toujours en augmentant.

28. Dans l'hypothèſe que nous ſuivons ici, l'enjeu, qui ſeroit $\frac{1}{2}(1 + 1 + 1 +$ &c.) en ſuppoſant tous les cas également poſſibles, devient (en les ſuppoſant inégalement poſſibles) $= \frac{1}{2}(1 + 1 + a + (1 - a) \times (1 + a + b) \ldots +$ &c.). Le dernier terme de cette ſuite, comme on vient de l'obſerver, eſt zero, & la ſuite 1, $1 + a$, &c. va d'abord en augmentant, c'eſt-à-dire que le ſecond terme au moins eſt > 1, ainſi la ſomme de cette derniere ſuite (ſi on ſuppoſe que la ſuite n'ait qu'un nombre fini de termes) peut être $=$, ou $>$, ou $<$ que la ſomme de la premiere $1 + 1 + 1$, &c. ſelon la loi des quantités a, b, &c. mais cette ſomme n'eſt pas pour cela égale à l'infini, lorſque le nombre des termes $= \infty$.

29. En effet, ſuppoſons que les quantités a, b, c, &c.

ſoient telles qu'on voudra, mais aſſujetties aux conditions exprimées ci-deſſus; il eſt d'abord clair que $\frac{1+a+b+c\&c}{2} < 1$. En ſecond lieu, que $1-a-b-c-d-e$ &c. eſt $< 1-a-b-c-d$ &c, en retranchant toujours le dernier terme e.

30. D'où il ſuit qu'un terme quelconque $(1-a)(1-a-b)(1-a-b-c)(1-a-b-c-d)(1+a+b+c+d+e)$, eſt $<(1-a)(1-a-b)(1-a-b-c-d)\times 2$; & le terme ſuivant $<(1-a)(1-a-b)(1-a-b-c)(1-a-b-c-d)^2\times 2$.

31. Soit donc m le nombre des termes juſqu'à $(1-a)(1-a-b)(1-a-b-c)(1-a-b-c-d)(1+a+b+c+d+e)$ excluſivement, & M la ſomme de ces termes, il eſt aiſé de voir qu'en nommant $1\pm\alpha$ la quantité $(1-a)(1-a-b)(1-a-b-c-d)$, la ſomme totale de la ſérie ſera $<M+$ une progreſſion géométrique dont $1\pm\alpha$ eſt le premier terme & le ſecond $(1\pm\alpha)\times(1-a-b-c-d)$, ladite ſuite étant multipliée par 2, c'eſt-à-dire que la ſomme ſera $<M+\frac{2(1\pm\alpha)}{a+b+c+d}$, quantité qui ſera toujours finie, & qui pourra même, ainſi que M, être ſuppoſée renfermée dans certaines limites, ſelon la ſuppoſition qu'on ſera ſur la valeur & la loi des quantités très-petites a, b, c, d, &c.

32. Par exemple, ſuppoſons pour un moment que a, b, c, d, e, &c. ſoient ſi petites, qu'on puiſſe né-

gliger toutes les puiſſances de ces quantités, à commencer du quarré, les termes de la ſuite ſeront évidemment, en mettant à part le coefficient conſtant $\frac{1}{2}$ qui les multiplie tous,

1,
$1+a$,
$1+b$,
$1-a+c$,
$1-2a-b+d$,
$1-3a-2b-c+e$,
$1-4a-3b-2c-d+f$,

&c ainſi de ſuite.

33. La premiere colonne verticale donnera m (nombre des termes); ſi on prend enſuite la ſomme des termes extérieurs diagonalement en deſcendant de gauche à droite, & qu'on les ſuppoſe égaux, on aura $a+b+c+d+e+f=a+a+a+a+a+a=(m-1)a$, & ainſi de ſuite; après quoi reprenant la ſomme des termes verticaux reſtans, & ſuppoſant toujours $a=b=c$, &c. la ſomme totale ſera $m+(m-1)a-a(1+2+3+4\ldots+m-3)-a(1+2+3\ldots\ldots+m-4)-a(1+2+3\ldots\ldots+m-5)$ &c. $-a$. C'eſt-à-dire $m+(m-1)a-a$ multiplié par la ſomme des nombres triangulaires depuis 1, juſqu'à celui qui eſt le $(m-3)^e$, ou $-a$ multiplié par le $(m-3)^e$, nombre pyramidal.

34. Or le n^e nombre pyramidal étant $\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}$, le $(m-3)^e$ eſt $(m-3)(m-2)\times(m-1)\times\frac{1}{2\cdot 3}$. Ainſi

la ſomme approchée, mais non pas rigoureuſement exacte, ſeroit $m+(m-1)a-\frac{a(m-3)(m-2)(m-1)}{1.2.3}$

$=m+\frac{a}{2.3}[(-m^3+6m^2-5m)$, qui eſt $<m$, ſi $m>5$. Il eſt clair auſſi que

$\frac{2.3(m-1)-(m-3)(m-2)(m-1)}{2.3}=$

$\frac{[6-(m-3)(m-2)](m-1)}{2.3}=\frac{(-mm+5m)(m-1)}{2.3}=$

$\frac{-m(m-1)(m-5)}{2.3}$. Donc l'enjeu eſt $<\frac{1}{2}m$ ſi $m>5$, eſt $=\frac{1}{2}m$ ſi $m=5$, & $>\frac{1}{2}m$ ſi $m<5$.

35. On voit encore que ſi m eſt très-grand, il faut ſuppoſer $am^2<6$, afin que l'enjeu ne devienne pas négatif, ce qui ne ſauroit avoir lieu en aucun cas; mais ceci n'eſt qu'un eſſai de calcul imparfait pour montrer que l'enjeu, dans notre hypothèſe, n'eſt plus infini comme dans le problême de Peterſbourg.

36. Plus généralement, ſoit $1-a-b-c-d-e$ &c. $=\frac{1}{1+pz}$, z étant $=m-1$, en ſorte que $a+b+c+d$ &c. $=\frac{pz}{1+pz}$, p étant un nombre très-petit, afin que quand $z=1$, $a+b+c+d$ &c. qui ſe réduit pour lors à a, ſoit très-petit.

37. On voit aiſément que quand $z=0$, ou $m=1$, $1-a-b-c-d$, &c. $=1$, & que, quand z ou

$m = \infty$, on a $1 + a + b + c + d$, &c. $= 1 + \frac{\rho\Sigma}{1+\rho\Sigma} =$ 2, comme cela doit être.

38. Il eſt clair qu'un terme quelconque dont le rang eſt m, ſera $= \frac{1}{1+\rho} \times \frac{1}{1+2\rho} \times \ldots\ldots \frac{1}{1+(m-2)\rho} \times \frac{1+\rho(m-1)}{1+(m-2)\rho} = \frac{1+2\rho(m-1)}{(1+\rho)(1+2\rho)\ldots\ldots(1+m\rho-\rho)}$, & que la différence de deux termes conſécutifs eſt $\frac{1}{(1+\rho)(1+2\rho)\ldots\ldots(1+m\rho-\rho)} \times \left(1 + 2\rho(m-1) - \frac{1+2\rho m}{1+\rho m}\right)$. Or ce dernier facteur eſt $= -2\rho + \rho m - 2\rho\rho m + 2\rho\rho m^2$, quantité évidemment poſitive, ſurtout lorſque m eſt très grand.

39. Ainſi, dans cette hypothèſe, les termes vont en diminuant, à commencer du ſecond au troiſiéme terme, puiſque $m = 1$ rend la différence négative, & que $m = 2$ la rend poſitive.

39. En général, ſi on prend ω & ρ pour des quantités quelconques, ρ étant toujours très-petit, & $1 + \omega + \rho < 2$, le rapport d'un terme quelconque au précédent eſt $\frac{(1-\omega)(1+\omega+\rho)}{1+\omega}$; or ρ eſt $< 1 - \omega$, puiſque $1 + \omega + \rho < 2$; ſoit donc $\rho = \rho'(1-\omega)$, ρ' étant une fraction, on aura le rapport dont il s'agit $= \frac{1-\omega^2+\rho'-2\rho'\omega+\rho'\omega^2}{1+\omega}$, cette quantité ſera $<$, ou

$=$ 1

$\leqq$, ou $> 1+\omega$ ſi $-\omega^2+\rho'-2\rho'\omega+\rho'\omega^2 \gtreqless \omega$, c'eſt-à-dire, ſi on a $\rho' \gtreqless \frac{\omega+\omega^2}{(1-\omega)^2}$.

40. Comme il faut que ρ' ſoit une fraction, il eſt clair que dans le cas où $\rho' > \frac{\omega+\omega^2}{(1-\omega)^2}$, cette derniere quantité doit être une fraction, d'où l'on tire $\omega + \omega^2 < (1-\omega)^2$, ou $3\omega < 1$.

41. Il eſt clair encore, que la quantité $\frac{1-\omega^2+\rho'(1-\omega)^2}{1+\omega}$ eſt d'autant plus grande, que ω eſt moindre, en ſorte que ſa plus grande valeur ou plutôt la limite de ſes plus grandes valeurs ſe trouve en ſuppoſant $\rho' = 1$ & $\omega = 0$, ce qui donne 2 pour cette limite.

42. D'un autre côté, ρ' qui doit être < 1, doit être > 0, c'eſt pourquoi la limite des plus petites valeurs du rapport d'un terme quelconque au précédent, eſt $\frac{1-\omega^2}{1+\omega} = 1-\omega$.

43. Si les quantités a, b, c, d, e, &c. (art. 19 & ſuiv.) vont toujours en diminuant au nombre de $m-1$, il eſt aiſé de voir qu'en nommant ϖ leur ſomme, on aura $\rho < \frac{\varpi}{m-1}$. Soit donc $\rho = \frac{\rho'\varpi}{m-1}$, ρ' étant < 1, & on aura $\frac{(1-\omega)(1+\omega+\rho)}{1+\omega} = \frac{1-\omega^2+\frac{\rho'\varpi(1-\omega)}{m-1}}{1+\omega}$, &

$m = \infty$, on a $1 + a + b + c + d$, &c. $= 1 + \frac{\rho\xi}{1+\rho\xi} =$ 2, comme cela doit être.

38. Il eſt clair qu'un terme quelconque dont le rang eſt m, ſera $= \frac{1}{1+\rho} \times \frac{1}{1+2\rho} \times \ldots\ldots \frac{1}{1+(m-2)\rho} \times \frac{1+\rho(m-1)}{1+(m-2)\rho} = \frac{1+\rho(m-1)}{(1+\rho)(1+2\rho)\ldots\ldots(1+m\rho-\rho)}$, & que la différence de deux termes conſécutifs eſt $\frac{1}{(1+\rho)(1+2\rho)\ldots\ldots(1+m\rho-\rho)} \times \left(1 + 2\rho(m-1) - \frac{1+2\rho m}{1+\rho m}\right)$. Or ce dernier facteur eſt $= -2\rho + \rho m - 2\rho\rho m + 2\rho\rho m^2$, quantité évidemment poſitive, ſurtout lorſque m eſt très-grand.

39. Ainſi, dans cette hypothèſe, les termes vont en diminuant, à commencer du ſecond au troiſiéme terme, puiſque $m = 1$ rend la différence négative, & que $m = 2$ la rend poſitive.

39. En général, ſi on prend ω & ρ pour des quantités quelconques, ρ étant toujours très-petit, & $1 + \omega + \rho < 2$, le rapport d'un terme quelconque au précédent eſt $\frac{(1-\omega)(1+\omega+\rho)}{1+\omega}$; or ρ eſt $< 1 - \omega$, puiſque $1 + \omega + \rho < 2$, ſoit donc $\rho = \rho'(1-\omega)$, ρ' étant une fraction, on aura le rapport dont il s'agit $= \frac{1-\omega^2+\rho'-2\rho'\omega+\rho'\omega^2}{1+\omega}$, cette quantité ſera $<$, ou

$=$ 1

$\equiv$, ou $> 1+\omega$ ſi $-\omega^2+\rho'-2\rho'\omega+\rho'\omega^2 \gtrless \omega$, c'eſt-à-dire, ſi on a $\rho' \gtrless \frac{\omega+\omega^2}{(1-\omega)^2}$.

40. Comme il faut que ρ' ſoit une fraction, il eſt clair que dans le cas où $\rho' > \frac{\omega+\omega^2}{(1-\omega)^2}$, cette derniere quantité doit être une fraction, d'où l'on tire $\omega+\omega^2 < (1-\omega)^2$, ou $3\omega < 1$.

41. Il eſt clair encore, que la quantité $\frac{1-\omega^2+\rho'(1-\omega)^2}{1+\omega}$ eſt d'autant plus grande, que ω eſt moindre, en ſorte que ſa plus grande valeur ou plutôt la limite de ſes plus grandes valeurs ſe trouve en ſuppoſant $\rho'=1$ & $\omega=0$, ce qui donne 2 pour cette limite.

42. D'un autre côté, ρ' qui doit être < 1, doit être > 0, c'eſt pourquoi la limite des plus petites valeurs du rapport d'un terme quelconque au précédent, eſt $\frac{1-\omega^2}{1+\omega} = 1-\omega$.

43. Si les quantités a, b, c, d, e, &c. (art. 19 & ſuiv.) vont toujours en diminuant au nombre de $m-1$, il eſt aiſé de voir qu'en nommant ϖ leur ſomme, on aura $\rho < \frac{\varpi}{m-1}$. Soit donc $\rho = \frac{\rho'\varpi}{m-1}$, ρ' étant < 1, & on aura $\frac{(1-\omega)(1+\omega+\rho)}{1+\omega} = \frac{1-\omega^2+\frac{\rho'\varpi(1-\omega)}{m-1}}{1+\omega}$, &

cette quantité ſera $\gtrless 1$ ſelon que $\frac{p'\varpi(1-\varpi)}{m-1}$ ſera $\gtrless \varpi+\varpi^2$.

44. Donc puiſque p' doit être <1, il faudra, ſi on veut que la premiere de ces quantités ſurpaſſe ou égale la ſeconde, que $(\varpi+\varpi^1)\times\frac{(m-1)}{\varpi(1-\varpi)}$ ou $\frac{(1+\varpi)(m-1)}{1-\varpi}$, ſoit une fraction, ce qui eſt impoſſible. Donc la premiere quantité ne ſauroit être plus grande que la ſeconde, ni lui être égale; donc les termes vont en diminuant (au-delà du ſecond) dans la ſérie qui exprime l'enjeu. Je dis au-delà du ſecond, car il eſt clair par l'art. 24, que le ſecond ſera toujours $>$ que le premier. En voilà aſſez pour faire voir que les termes de l'enjeu vont en diminuant dès le troiſiéme coup, juſqu'au dernier. Nous avons prouvé d'ailleurs (art. 31) que l'enjeu total, ſomme de ces termes, eſt fini, en ſuppoſant même le nombre de coups infini. Ainſi le réſultat de la ſolution que nous donnons ici du problême de Peterſbourg, n'eſt pas ſujet à la difficulté inſoluble des ſolutions ordinaires.

45. Si $\frac{1+\varpi}{2}$ eſt la probabilité que *croix* viendra plutôt que *pile*, & $\frac{1+\varpi'}{2}$ la probabilité qu'il arrivera ſi *pile* a paru n coups de ſuite, on peut demander quelle ſera la probabilité totale qui réſulte de ces deux-là?

46. Ajoutera-t-on enſemble les probabilités $\frac{1+r}{2}$ & $\frac{1+a'}{2}$? Mais leur ſomme $\frac{2+a'+r}{2}$ ſeroit plus grande que l'unité, ce qui ne ſe peut.

Se contentera-t-on d'ajouter à la probabilité $\frac{1}{2}$ qui ſeroit celle de *croix* dans le cas de $r=0$ & de $a'=0$, les augmentations $\frac{a'}{2}$ & $\frac{r}{2}$ qu'elle reçoit par les deux ſuppoſitions données? Mais la ſomme $\frac{1+a'+r}{2}$, pourroit encore être plus grande que l'unité.

47. Enfin, ajoutera-t-on enſemble les probabilités $\frac{1+r}{2}$, $\frac{1+a'}{2}$, qui doivent donner *croix*, pour les diviſer enſuite par la ſomme $\frac{1+r}{2}$, $\frac{1+a'}{2}$, $\frac{1-r}{2}$, $\frac{1-a'}{2}$ des probabilités qui doivent donner *croix* ou *pile*, c'eſt-à-dire par 2? En ce cas, on auroit $\frac{2+r+a'}{4}$, qui eſt $<$ que la plus grande des deux quantités $\frac{1+r}{2}$, $\frac{1+a'}{2}$; au lieu qu'elle doit être plus grande que la plus grande de ces quantités.

48. On pourroit dire que la probabilité $\frac{1+a'}{2}$ que *croix* viendra, ſuppoſée ci-deſſus dans le cas où *pile* eſt déja venu pluſieurs fois de ſuite, n'eſt pas la même lorſque $\frac{1+r}{2}$ eſt la probabilité que *croix* doit tomber

plutôt que *pile*, & lorſque cette probabilité eſt ſimplement $\frac{1}{2}$, c'eſt à-dire que *croix* peut arriver auſſi-bien que *pile*. Cette obſervation peut être très-juſte. Mais il ſemble au moins que la probabilité doit être, dans le cas dont il s'agit ici, $> \frac{1+x}{2}$ qui ſeroit la probabilité de *croix* au ſeul premier coup. Or je demande, d'après les principes expoſés ci-deſſus, de combien la probabilité $\frac{1+x}{2}$ doit être augmentée après que *pile* eſt tombée de ſuite un certain nombre de fois?

49. Dans la théorie ordinaire, & en parlant de tous les principes admis juſqu'à préſent par les Géometres ſur l'indifférence des événemens ſemblables ſucceſſifs ou non ſucceſſifs, lorſqu'un événement, par exemple, *croix*, eſt arrivé pluſieurs fois de ſuite, & qu'on n'avoit d'ailleurs aucune raiſon de croire qu'il dût arriver ainſi, il eſt clair qu'il y a quelque probabilité que *croix* avoit plus de penchant à venir que *pile*. Mais comment eſtimer cette probabilité d'après la chûte ſucceſſive & ſuppoſée de *croix* un certain nombre de fois de ſuite? Cette queſtion a rapport à la recherche de la probabilité des cauſes par les événemens, dont pluſieurs ſavans Géometres ſe ſont occupés. Voyez dans les *Tranſactions philoſophiques* de 1763 & 1764, les recherches de MM. Bayes & Price ſur ce ſujet, & celles de M. de la Place dans le VIe Volume des *Mémoires des Savans Etrangers*, préſentés à l'Académie des Sciences, & imprimés en 1774.

§. III.

Sur des différentielles réductibles aux arcs de ſections coniques.

1. M. Euler, dans les Tomes VIII & X des nouveaux Mém. de Pererſbourg, a donné des moyens de réduire à des arcs de ſections coniques la quantité $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, f, g, h, k étant des coefficiens conſtans. Il eſt très-aiſé de voir, comme je l'ai déja obſervé dans les Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1769, pag. 115, que cette différentielle ſe réduit à des arcs de ſections coniques par les méthodes que j'ai données dans les Mém. de Berlin, année 1746. Je me propoſe donc ſeulement ici d'examiner les cas où ces différentielles ſe réduiſent à la rectification de l'ellipſe ſeule, ou de l'hyperbole ſeule, ou de l'ellipſe & de l'hyperbole tout-à-la-fois.

2. Je remarque d'abord que f & g ne ſauroient être tout-à-la-fois négatifs, non plus que h & k, puiſqu'alors le radical $\sqrt{(f+gzz)}$ ou le radical $\sqrt{(h+kzz)}$ ſeroit imaginaire, & la différentielle impoſſible, ou plutôt inutile à intégrer; il faut ſeulement obſerver que f, g, h, k, pourroient être tous négatifs à-la-fois, parce qu'alors, en changeant les ſignes du numérateur

& du dénominateur, la quantité $\sqrt{\left(\frac{f+g\zeta\zeta}{h+k\zeta\zeta}\right)}$ feroit réelle, ainſi, comme les ſignes — ſeroient alors changés en +, je ne compte ici que les cas ſuivans.

1°. Celui de f, g, h, k, tous poſitifs.
2°. Celui de $f+g\zeta\zeta$ & de $h-k\zeta\zeta$,
3°. Celui de $f+g\zeta\zeta$ & de $k\zeta\zeta-h$;
4°. Celui de $f-g\zeta\zeta$ & de $h+k\zeta\zeta$,
5°. Celui de $f-g\zeta\zeta$ & de $h-k\zeta\zeta$;
6°. Celui de $f-g\zeta\zeta$ & de $k\zeta\zeta-h$;
7°. Celui de $g\zeta\zeta-f$ & de $h+k\zeta\zeta$;
8°. Celui de $g\zeta\zeta-f$ & de $h-k\zeta\zeta$;
9°. Celui de $g\zeta\zeta-f$ & de $k\zeta\zeta-h$.

3. Suppoſons préſentement $f+g\zeta\zeta=x$, f & g étant tous deux poſitifs, nous aurons $\zeta\zeta=\frac{x-f}{g}$; $d\zeta=\frac{dx}{2\sqrt{g}.\sqrt{(x-f)}}$; $h+k\zeta\zeta=h+\frac{kx-kf}{g}$; & $\frac{d\zeta\sqrt{(f+g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}=$ (en négligeant $2\sqrt{g}$ au dénominateur) $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-f)}.\sqrt{\left(h+\frac{kx-kf}{g}\right)}}=$ (en négligeant encore $\sqrt{g}$ au numérateur) $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(kxx+x(hg-2kf)+kff-hgf)}}$.

4. Maintenant nous avons vu dans les Mém. cités de Berlin, 1746, pag. 201 & 203, art. 15, 17 & 20, que les différentielles réductibles à des arcs d'ellipſe ſont de la forme $\frac{dx}{\sqrt{(+f'x-xx-g'g')}}$, f' & g' étant des

conſtantes (*a*), & que celles qui ſont réductibles à des arcs d'hyperbole, ſont de la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(xx \pm f'x - g'g')}}$ ou $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(g'g' \pm f'x - xx)}}$, avec cette différence, que la premiere de ces deux différentielles peut être intégrée par un ſimple arc d'hyperbole, & la ſeconde par un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

5. Dans la préſente ſuppoſition, de f & g poſitifs, il faut pour la réduction à l'arc d'ellipſe, 1°. que k ſoit négatif, 2°. que $hg - 2kf$ ſoit poſitif & réel, 3°. que $kff - hgf$ ſoit négatif; à quoi on doit encore ajouter (Mém. de Berl. 1746, pag. 201, art. 16) la condition de $f'^2 > 4g'g'$, afin que la quantité $f'x - xx - g'g' = \frac{f'^2}{4} - gg - \left(\frac{f}{2} - x\right)^2 = \frac{f'^2}{4} - gg - \left(x - \frac{f}{2}\right)^2$, ou $\frac{f'f'}{4} - g'g' - \left(\frac{f}{2} - x\right)^2$ ne ſoit pas imaginaire, quelque valeur qu'on donne à x; ce qui arriveroit ſi $\frac{ff}{4} - gg$ étoit négatif, puiſque $\left(\frac{f}{2} - x\right)^2$ ou $\left(x - \frac{f}{2}\right)^2$ eſt toujours poſitif.

2°. Dans la même hypothèſe de f & g poſitifs, il faudra pour la réduction à l'arc ſimple d'hyperbole que k

(*a*) Il eſt bon d'obſerver ici que ſi dans les Mém. de Berlin, 1746, p. 201, art. XV, on ſuppoſe $q - 1$ négatif dans l'équation $aa + (q-1)xx = ay$, on aura $xx = \frac{aa - ay}{1-q}$, & la tranſformée ſera toujours de la forme $\frac{dz\sqrt{1}}{\sqrt{((q+e)1-11-qzz)}}$, c'eſt-à-dire, $\frac{dz\sqrt{1}}{\sqrt{(+f1-11-gg)}}$.

ſoit poſitif & $kff - hgf$ négatif, & pour la réduction à l'arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, il faut que k ſoit négatif, & $kff - hgf$ poſitif, le terme $x(hg - 2kf)$ étant d'ailleurs poſitif ou négatif comme on voudra, & on remarquera que la condition de $f'f < 4g'g'$ n'eſt pas ici néceſſaire, comme dans le cas de l'ellipſe, parce que $xx \pm f'x - g'g' = \left(x \pm \frac{f'}{2}\right)^2 - \frac{f'^2}{4} - g'g'$ & $\pm f'x - xx + g'g' = \frac{f'^2}{4} + g'g' - \left(x \pm \frac{f'}{2}\right)^2$, deux quantités qui peuvent être poſitives, au moins en ſuppoſant certaines valeurs à x.

6. Commençons par le ſecond cas, c'eſt-à-dire, par la réduction à des arcs d'hyperboles, parce que ce cas ne renferme que deux conditions, au lieu que celui de l'ellipſe, qui en renferme trois & même quatre, eſt par cette raiſon un peu plus compoſé.

7. Mais d'abord obſervons en général, que ſi on a $-f + g\zeta\zeta$, il faudra, dans le radical inférieur de la transformée, changer le ſigne des termes où f ſe trouve linéaire, parce qu'on aura ici $\frac{x+f}{g} = \zeta\zeta$, au lieu de $\frac{x-f}{g} = \zeta\zeta$; & que ſi on a $f - g\zeta\zeta$, ce qui donne $\frac{f-x}{g} = \zeta\zeta$, il faudra changer le ſigne du terme hgx, & le ſigne du terme hgf, & comme le terme où eſt x n'influe point dans les conditions du ſecond cas, il s'enſuit que dans ce ſecond cas, il faudra ſimplement

remarquer

remarquer qu'on a $\mp hgf$, ſavoir — dans le cas de $f+g\zeta\zeta$, & + dans le cas de $f-g\zeta\zeta$ ou $g\zeta\zeta-f$.

8. Donc, pour réduire le radical à la forme $\sqrt{(xx\pm f'x+g'g')}$, c'eſt à-dire, à un ſimple arc d'hyperbole, on trouvera aiſément que, ſi l'on a $f+g\zeta\zeta$ ou $f-g\zeta\zeta$, les conditions ſeront, que k ſoit poſitif, & $kff\mp hgf$ négatif, ſavoir — dans le premier cas, & + dans le ſecond, donc (à cauſe de f poſitif) $kf\mp hg$ ſera négatif, donc 1°. dans le cas de $-hg$, il eſt clair que $-hg$ doit être négatif, puiſque kf eſt poſitif, étant formé de deux quantités poſitives f, k, donc h doit être poſitif, puiſque g eſt poſitif, & de plus hg doit être $>kf$.

9. Donc le cas de $\frac{d\zeta\sqrt{(f+g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$ ſe réduit à un ſimple arc d'hyperbole, ſi h eſt poſitif, k poſitif, & $hg>kf$.

2°. Si on a $+hg$, ce qui arrive dans le cas de $f-g\zeta\zeta$, il eſt clair que la condition de $kf+hg$ négatif eſt impoſſible, ſi h eſt poſitif, & que ſi h eſt négatif, il faut que hg ſoit $>kf$. Donc $\frac{d\zeta\sqrt{(f-g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$ ne peut ſe réduire à un ſimple arc d'hyperbole, & $\frac{d\zeta\sqrt{(f-g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(k\zeta\zeta-h)}}$ ne pourroit s'y réduire, que ſi on avoit $hg>kf$, ce qui eſt impoſſible, car $f-g\zeta\zeta$ & $k\zeta\zeta-h$ devant être tous deux poſitifs, on a $\frac{f}{g}>\zeta\zeta>\frac{h}{k}$; donc $\frac{f}{g}>\frac{h}{k}$, & $kf>hg$.

3°. Si on a $g\zeta\zeta - f$, alors les conditions pour la réduction dont il s'agit, ſont que k ſoit poſitif, & $kf + hg$ négatif. Donc h ſera négatif, & $hg > kf$. Ce cas eſt repréſenté par $\frac{d\zeta\sqrt{(g\zeta\zeta - f)}}{\sqrt{(k\zeta\zeta - h)}}$, qui ſera par conſéquent réductible à un ſimple arc d'hyperbole, ſi hg eſt $> kf$.

10. Venons maintenant au cas de la réduction à $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm fx - xx + gg)}}$, c'eſt-à-dire, au cas où la propoſée doit ſe réduire à un arc ſeul d'hyperbole, combiné avec une quantité algébrique; ſi dans ce cas on a $f + g\zeta\zeta$ ou $f - g\zeta\zeta$, les conditions ſont que k ſoit négatif, & $kff \mp hgf$ poſitif, ou $kf \mp kg$ poſitif; ſoit $k = -\omega$, il faudra que $-\omega f \mp hg$ ſoit poſitif, donc ſi on a $-hg$, c'eſt-à-dire, $f + g\zeta\zeta$, h doit être négatif, ce qui ne ſe peut, puiſque k eſt déja négatif, ainſi le cas de $\frac{d\zeta\sqrt{(f + g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(h - k\zeta\zeta)}}$ ne peut ſe réduire à un arc ſeul d'hyperbole, combiné même avec une quantité algébrique. Et ſi on a $+hg$, c'eſt-à-dire $f - g\zeta\zeta$, alors il faut, pour que $-\omega f + hg$ ſoit poſitif, 1°. que h ſoit poſitif, 2°. que $hg > kf$. Donc la différentielle $\frac{d\zeta\sqrt{(f - g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(h - k\zeta\zeta)}}$ ſe réduit à un ſimple arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, pourvu que hg ſoit $> kf$.

11. Enfin, ſi on avoit $\sqrt{(g\zeta\zeta - f)}$, on auroit, dans le cas de la réduction dont il s'agit, k négatif, &

$kf+hg$ positif, ou $-af+hg$ positif. Donc h doit être positif, & $hg>af$. Donc le cas de $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ est encore réductible à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, si on a $hg>kf$, condition d'ailleurs indispensable pour la *realité* de la différentielle, puisqu'on a ici $\frac{h}{k}>zz>\frac{f}{g}$, d'où $hg>kf$.

12. Donc, 1°. le cas de $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, & celui de $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$, se réduisent à un simple arc d'hyperbole si hg est $>kf$. 2°. Le cas de $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, & celui de $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, se réduisent, si $hg>kf$, à un arc simple d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique; & il ne peut y avoir d'autres formes que celles-là, qui dépendent de la rectification de l'hyperbole seule.

13. Venons maintenant aux différentielles $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$ réductibles à la rectification de l'ellipse, & prenons d'abord le cas où la quantité radicale est $kxx+x(hg-2kf)+kff-hgf$, c'est-à-dire, où l'on a $\sqrt{(f+gzz)}$. On voit d'abord que k doit être négatif, & $kff-hgf$ négatif, c'est-à-dire, $kf-hg$ négatif. Soit $k=-a$; donc $-af-hg$ sera négatif. Donc h doit être positif, ou h négatif & $hg<kf$. Or

h ne ſauroit être négatif, puiſque k l'eſt déja. Donc h doit être ſeulement poſitif. 3°. $hg-2kf$ ou $hg+2af$ doit être poſitif & l'eſt en effet, puiſque h, g, a, f, ſont tous poſitifs. 4°. Enfin la condition ci-deſſus, (art. 5), de $f'f'-4g'g'$ poſitif, doit donner encore ici une quatriéme condition, en écrivant d'abord $-k$ pour $+k$, & remarquant enſuite après ce changement, que $\frac{hg+2kf}{k}=f'$, & que $-g'g'=-\frac{kff-hgf}{k}$, cette condition ſera donc $(hg+2kf)^2>4k(kff+hgf)$, ou $h^2g^2>0$, ce qui a lieu en effet. Donc le cas de $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ ſe réduit à la rectification de l'ellipſe.

14. Si on a $\sqrt{(gzz-f)}$, la quantité qui eſt ſous le ſigne radical ſera (en changeant le ſigne de f) $kxx+x(hg+2kf)+kff+hgf$, & l'on a pour lors, 1°. k négatif; 2°. $kf+hg$ négatif, ou $-af+hg$ négatif, & comme h ne ſauroit être négatif, puiſque k l'eſt déja, il s'enſuit que h doit être poſitif, & que hg doit être $<kf$, 3°. Enfin $hg+2kf$ ou $hg-2af$ doit être poſitif, ce qui ne ſauroit s'accorder avec la condition de $hg+kf$, ou $hg-af$ négatif, puiſqu'à plus forte raiſon $hg+2kf$, ou $hg-2af$ ſeroit auſſi négatif. Donc le cas préſent de $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ ne ſauroit ſe réduire à la rectification de l'ellipſe, & en effet, on a $\frac{h}{k}>zz>\frac{f}{g}$, ou $hg>kf$, ce qui ne ſauroit s'accorder avec la condition de $hg<kf$.

15. Enfin ſi on a $\sqrt{(f-gzz)}$ la quantité qui eſt ſous le ſigne radical ſera $kxx+x(-2kf-hg)+kff+hgf$, & on a, 1°. k négatif, 2°. $kf+hg$ négatif, ou $-\omega f+hg$ négatif; & comme k ne peut être négatif, puiſque k l'eſt déja, donc h eſt poſitif, donc hg doit être $<kf$. 3°. $-2kf-hg$ ou $+2\omega f-hg$ doit être poſitif, ce qui donne $hg<2kf$, condition qui ſuit de la précédente $hg<kf$. 4°. Enfin la condition de $f'f'-4g'g'>0$ en donnera ici une quatriéme, en obſervant de changer $+k$ en $-k$, & remarquant enſuite que $\frac{2kf-hg}{k}=f'$, & que $-g'g'=-\frac{kff+hgf}{k}$, ce qui donne $(2kf-hg)^2>4k(kff-hgf)$ ou $h^2g^2>0$, condition qui a toujours lieu. Donc $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ ſe réduit à la rectification de l'ellipſe, ſi $hg<kf$.

16. Donc la différentielle $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ dépend de la rectification d'une ellipſe, & la différentielle $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, en dépend auſſi, pourvu que dans ce dernier cas $hg<kf$, & il n'y a point d'autres formes que ces deux-là, qui puiſſent ſe réduire à la rectification de l'ellipſe ſeule.

17. Quelques-unes des propoſitions précédentes ſont aiſées à démontrer d'une autre maniere & *à priori*, en conſidérant, 1°. que l'élément d'une ellipſe eſt $\frac{dz\sqrt{(1+(q-1)zz)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, en nommant q le parametre, ou

plutôt le rapport du parametre à l'axe, d'où il eſt clair que cet élément eſt en général $\frac{dx\sqrt{(1\pm mxx)}}{\sqrt{(1-xx)}}$, m étant <1, ſi m eſt négatif, & pouvant être tout ce qu'on voudra, ſi m eſt poſitif. Donc ſi on a $\frac{dx\sqrt{(f\pm gxx)}}{\sqrt{(h-kxx)}}$, on peut la changer en $\frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{h}}\times\frac{\sqrt{\left(1\pm\frac{gxx}{f}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{kxx}{h}\right)}}=$ (en faiſant $\frac{kxx}{h}=uu$) $Adu\times\frac{\sqrt{\left(1\pm\frac{gh}{kf}uu\right)}}{\sqrt{(1-uu)}}$, donc ſi on a $+$, $\frac{gh}{kf}$ peut être tout ce qu'on voudra, & ſi on a $-$, gh doit être $<kf$.

18. De même l'élément de l'hyperbole eſt $\frac{dx\sqrt{[(q+1)xx-1]}}{\sqrt{(xx-1)}}$, ou $\frac{dx\sqrt{[(q+1)xx+1]}}{\sqrt{(xx+1)}}$, c'eſt-à-dire $\frac{dx\sqrt{(mxx\pm1)}}{\sqrt{(xx+1)}}$, m étant toujours >1; donc ſi on a $\frac{dx\sqrt{(gxx\mp f)}}{\sqrt{(kxx\mp h)}}$, on la changera en $\frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{h}}\times\frac{\sqrt{\left(\frac{gxx}{f}\mp1\right)}}{\sqrt{\left(\frac{kxx}{h}\mp1\right)}}=$ (en ſuppoſant $\frac{kxx}{h}=uu$) $Adu\frac{\sqrt{\left(\frac{gh}{kf}uu\mp1\right)}}{\sqrt{(uu\mp1)}}$; donc gh doit être $>kf$.

19. Mais cette méthode démontre ſeulement la condition de $gh>$ ou $<kf$, & la méthode précédente

démontre de plus quels doivent être les ſignes des coefficiens dans les formes $\frac{dx\sqrt{(f+gxx)}}{\sqrt{(h+kxx)}}$, qui peuvent ſe réduire à un ſimple arc d'ellipſe ou d'hyperbole; ou à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

20. Si on nomme m' le demi-axe conjugué au demi-axe 1 ſur lequel ſont pris les a, on aura en général $q=m'^2$, donc pour l'ellipſe $m'^2-1=\pm\frac{gh}{kf}$, & pour l'hyperbole $m'^2+1=\frac{gh}{kf}$, donc dans le premier cas $m'=\sqrt{\left(1\pm\frac{gh}{kf}\right)}$, & dans le ſecond $m'=\sqrt{\left(\frac{gh}{kf}-1\right)}$.

21. Il réſulte des recherches précédentes, qu'il n'y a 1°. que les deux différentielles $\frac{dx\sqrt{(f+gxx}}{\sqrt{(h-kxx)}}$ & $\frac{dx\sqrt{(f-gxx)}}{\sqrt{(h-kxx)}}$ qui puiſſent dans tous les cas ſe réduire à la rectification d'une ſeule ſection conique; la premiere à la rectification de l'ellipſe, la ſeconde à celle de l'ellipſe ſi $hg<kf$, & à celle de l'hyperbole combinée avec une quantité algébrique, ſi $hg>kf$. 2°. On peut y ajouter la différentielle $\frac{dx\sqrt{(gxx-f)}}{\sqrt{(h-kxx)}}$, quoiqu'elle exige la condition $hg>kf$, parce que cette condition eſt néceſſaire pour que la différentielle ſoit réelle. 3°. Enfin, les deux différentielles $\frac{dx\sqrt{(gxx+f)}}{\sqrt{(kxx+h)}}$ &

$\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$, peuvent ſe réduire à un arc ſimple d'hyperbole, mais ſeulement dans le cas de $hg>kf$.

22. Il réſulte encore des mêmes recherches, que les différentielles réductibles à la-fois à des arcs d'ellipſe & d'hyperbole, ſont

1°. $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, ſi $hg<kf$;

2°. $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$;

3°. $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$;

4°. $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$; cas où l'on a néceſſairement $\frac{f}{g}>zz>\frac{h}{k}$, & par conſéquent $hg<kf$;

5°. $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$,

6°. $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$, ſi $hg<kf$,

7°. Enfin $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, ſi $hg<kf$.

23. Il réſulte enfin qu'en général $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$ ne peut ſe réduire, ni à la rectification de l'ellipſe ſeule, ni à celle de l'hyperbole ſeule, ſi f & h ſont de différens ſignes, & ne peut ſe réduire à la rectification de l'hyperbole, combinée avec une quantité algébrique, que dans le ſeul cas de $\frac{gzz-f}{h-kzz}$, d'où réſulte $hg\geqq kf$.

24.

24. Soit p un angle quelconque, il eſt clair, en faiſant cof. $p = u$, ou ſin. $p = u$, que la quantité $dp\sqrt{(\alpha+\zeta \text{ ſin. } p^2+\gamma \text{ cof. } p^2)}$, eſt réductible à la rectification de l'ellipſe, ſi on a $\alpha+\zeta$ poſitif ou $\alpha+\gamma$ poſitif, car cette quantité ſe changera en $\frac{du}{\sqrt{(1-uu)}}\times\sqrt{(\alpha+\zeta-\zeta u^2+\gamma u^2)}$, ou $\frac{du}{\sqrt{(1-uu)}}\times\sqrt{(\alpha+\gamma+\zeta u^2-\gamma u^2)}$, qui ſe réduit à la forme $\frac{d\pi\sqrt{(f\pm g\pi\pi)}}{\sqrt{(h-k\pi\pi)}}$, intégrable par la ſeule rectification de l'ellipſe, en obſervant de plus (art. 22) que ſi on a $-g\pi\pi$, il faut que $fk > gh$, d'où il réſulte, 1°. que la différentielle propoſée eſt réductible à la rectification de l'ellipſe ſeule ſi on a $\alpha+\zeta$ poſitif, & $\gamma-\zeta$ poſitif, ou $\alpha+\gamma$ poſitif, & $\zeta-\gamma$ poſitif. 2°. Si dans le premier cas $\gamma-\zeta$ eſt négatif, & $\zeta-\gamma$ dans le ſecond, on doit avoir $\frac{\alpha+\zeta}{-\gamma+\zeta} > 1$ ou $\frac{\alpha+\gamma}{-\zeta+\gamma} > 1$. On peut conſidérer au reſte, que dans l'une ou l'autre des deux formules le coefficient de u^2 ſera poſitif, puiſque ces coefficiens ſont de ſignes contraires; ainſi la ſeule condition de $\alpha+\zeta$ ou $\alpha+\gamma$ poſitif eſt ici ſuffiſante. Suppoſons $\alpha+\zeta$ poſitif, & $\gamma-\zeta$ poſitif, ce qui donne la premiere différentielle réductible à un arc d'ellipſe, il eſt clair que $\alpha+\zeta+\gamma-\zeta = \alpha+\gamma$ ſera poſitif, & que $\frac{\alpha+\gamma}{\gamma-\zeta}$ ſera > 1, puiſque quand même α ſeroit négatif & $= -\alpha'$, $\zeta+\alpha = \zeta-\alpha'$ étant poſitif (*hyp.*), on

aura $\zeta > \alpha'$, & par conſéquent (à cauſe de $\gamma - \zeta$ poſitif) $\gamma > \zeta > \alpha'$ & $\gamma - \alpha' > \gamma - \zeta$. Donc la ſeconde différentielle eſt auſſi réductible dans ce cas à un arc d'ellipſe, ce qui doit être en effet, puiſque la premiere & la ſeconde différentielle ſont les mêmes, & ne diffèrent qu'en ce que $x = \text{cof. } p$ dans la premiere, & $= \text{ſin. } p$ dans la ſeconde. On prouvera à peu près de même que ſi $\alpha + \zeta$ eſt poſitif, & $\gamma - \zeta$ négatif, & que $\frac{\alpha+\zeta}{-\gamma+\zeta} > 1$, $\alpha + \gamma$ ſera poſitif, & qu'ainſi les deux différentielles ſeront également réductibles à un ſimple arc d'ellipſe.

25. Il eſt clair que la différentielle propoſée peut ſe changer en $dp\sqrt{(M + N \text{ cof. } 2p)}$, ou en $\frac{dp'}{2}\sqrt{(M + N \text{ cof. } p')}$, & que, pour réduire en général ces deux différentielles à la précédente, il ſuffit d'écrire dans la ſeconde cof. $2p$, au lieu de cof. p', & d'écrire enſuite $2 \text{ cof. } p^2 - 1$, au lieu de cof. $2p$; après quoi il ſera facile de voir ſi la propoſée eſt réductible à un arc d'ellipſe.

26. Si on a $dp'\sqrt{(M + N \text{ ſin } p')}$, on ſera ſin. $p' =$ cof. q, ce qui donne cof. $p' =$ ſin. q, $dp' = -dq$, & la transformée $-dq\sqrt{(M + N \text{ cof. } q)}$, qui ſe réduit à la forme précédente.

27. Enfin ſi on avoit $dq'\sqrt{(M + N \text{ ſin. } p' + L \text{ cof. } p')}$, on écrira, au lieu de $N \text{ ſin. } p' + L \text{ cof. } p'$, la quantité $H \text{ ſin. } (p' + A)$, ce qui eſt toujours poſſible, & enſuite

q au lieu de $p'+A$, ce qui donnera la transformée $dq\sqrt{(M+H \text{ ſin. } q)}$, réductible à la forme précédente.

28. On voit au reſte que, dans le cas où les différentielles dont on vient de parler, ne ſont point réductibles à des arcs ſimples d'ellipſe, elles ſont au moins réductibles à des arcs de ſections coniques, puiſque la transformée ſera toujours de la forme $\frac{dx\sqrt{(f+gxx)}}{\sqrt{(1-x^2)}}$, & que de plus, ſi on a f négatif (ou $gxx-f$), & $g>f$, elle ſe réduit (art. 12, n°. 2) à un arc ſimple d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

29. On trouvera par une méthode ſemblable aux précédentes, les cas où $\frac{\zeta\zeta d\zeta}{\sqrt{(f+g\zeta\zeta)}\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$ ſe réduit à des arcs ſeuls d'ellipſe ou d'hyperbole. Il ſuffira pour cela de ſuppoſer $\zeta\zeta=x$, & on aura pour transformée $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(fh+gkxx+(fk+gh)x}}$, & d'appliquer à ce cas les raiſonnemens précédens, en obſervant, comme ci-deſſus, que f & g ne ſauroient être tous deux négatifs à-la-fois, non plus que h & k, & que s'ils ſont tous quatre négatifs, il faut changer les ſignes, ce qui les rendra tous poſitifs.

30. On trouvera par conſéquent, que la propoſée ſe réduit à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(xx\pm f'x-gg)}}$, c'eſt-à-dire, à la rectification d'un arc ſimple d'hyperbole, ſi on a gk poſitif, & fh négatif.

Donc, 1°. ſi on a $f+g\zeta\zeta$, il faut que k ſoit poſitif, & h négatif, c'eſt-à-dire, qu'on ait $\frac{\zeta\zeta d\zeta}{\sqrt{(f+g\zeta\zeta)\cdot\sqrt{(k\zeta\zeta-h)}}}$.

2°. Si on a $f-g\zeta\zeta$, il faut que k ſoit négatif, & h négatif, ce qui eſt impoſſible.

3°. Si on a $g\zeta\zeta-f$, il faut que k ſoit poſitif, & h poſitif, ce qui donne $\frac{\zeta\zeta d\zeta}{\sqrt{(g\zeta\zeta-f)}\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$.

31. On voit de même que la propoſée ſe réduit à $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm fx-xx+gg)}}$, c'eſt-à-dire, à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, ſi on a gk négatif, & fh poſitif.

Donc, 1°. ſi on a $f+g\zeta\zeta$, k doit être négatif, & h poſitif. Ce cas eſt repréſenté par $\frac{\zeta\zeta d\zeta}{\sqrt{(f+g\zeta\zeta)\cdot\sqrt{(h-k\zeta\zeta)}}}$.

2°. Si on a $f-g\zeta\zeta$, k doit être poſitif, & h poſitif. Ce cas eſt repréſenté par $\frac{\zeta\zeta d\zeta}{\sqrt{(f-g\zeta\zeta)}\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$.

3°. Si on a $g\zeta\zeta-f$, k doit être négatif, & h négatif, ce qui ne ſe peut.

32. On voit enfin que la propoſée ſe réduit à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(fx-xx-gg)}}$, c'eſt-à-dire, à un ſimple arc d'ellipſe, ſi on a fh & gk négatifs, & $fk+gh$ poſitif, & de plus $f'f'>4g'g'$.

Donc, 1°. ſi on a $f+g\zeta\zeta$, h doit être négatif, ainſi que k, ce qui ne ſe peut.

2°. Si on a $f-g\zeta\zeta$, k doit être positif, & h négatif, d'où l'on voit que la troisiéme condition de $fk+gh$ positif sera remplie, puisque fk sera positif, étant composé de deux quantités positives, ainsi que gh, formé de deux quantités négatives. Enfin, pour remplir la quatriéme condition, on observera que le radical exprimé en x, est représenté ici par $\sqrt{[}-fh-gkxx+(fk+gh)x]$, & qu'on a $f'=\frac{fk+gh}{gk}$, & $g'g'=\frac{fh}{gk}$, donc il faudra que $ffkk+2fkgh+g^2h^2$ soit $>4gkfh$ ou $(fk-gh)^2>0$, condition qui a toujours lieu. Donc on pourra réduire à un arc d'ellipse la différentielle $\frac{\zeta\zeta d\zeta}{\sqrt{(f-g\zeta\zeta)}\cdot\sqrt{(k\zeta\zeta-h)}}$; on remarquera seulement qu'ici $\frac{f}{g}$ doit être $>\zeta\zeta>\frac{h}{k}$, & par conséquent $fk>gh$, sans quoi la différentielle seroit imaginaire.

3°. Si on a $g\zeta\zeta-f$, h doit être positif, & k négatif, d'où l'on voit que la troisiéme condition de $fk+gh$ positif, sera remplie, puisque f & k sont négatifs, & g, h, positifs. A l'égard de la quatriéme condition, on observera que le radical est représenté ici par $\sqrt{[}-fh-gkxx+(fk+gh)x]$, & on trouvera, comme dans le cas de $f-g\zeta\zeta$, que la condition se réduit à $(fk-gh)^2>0$, condition qui a toujours lieu. Donc on pourra réduire à un arc d'ellipse la différen-

tielle $\frac{\zeta\zeta d\zeta}{\sqrt{(g\zeta\zeta-f)}\sqrt{(h-k\zeta\zeta)}}$. On remarquera ſeulement que cette différentielle ne peut être réelle qu'autant qu'on aura $\frac{h}{k}>\zeta\zeta>\frac{f}{g}$, & par conſéquent $hg>fk$. Ce cas eſt l'inverſe du précédent, ou plutôt n'eſt proprement que le même, où l'on a mis h pour f, & k pour g, & réciproquement.

33. On peut encore prouver d'une autre maniere les propoſitions précédentes, en conſidérant que la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(fx-xx-gg)}}=\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\alpha-x)}\sqrt{(x-\epsilon)}}$, ce qui donne $\alpha>x>\epsilon$, ou $\alpha>\epsilon$; d'où il eſt clair que dans les différentielles $\frac{\zeta\zeta d\zeta}{\sqrt{(f+g\zeta\zeta)}\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$ réductibles à la rectification de l'ellipſe, les quantités renfermées ſous les ſignes radicaux ſeront de la forme $f-g\zeta\zeta$, $k\zeta\zeta-h$, & que $\frac{f}{g}$ doit être $>\frac{h}{k}$, puiſque $\frac{f}{g}>\zeta\zeta>\frac{h}{k}$; ou de la forme $h-k\zeta\zeta$, $g\zeta\zeta-f$, & que $\frac{h}{k}$ doit être $>\frac{f}{g}$; deux cas qui reviennent au même.

34. Par la même raiſon, comme la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{xx\pm fx-gg}}$, réductible à un ſimple arc d'hyperbole ſe change en $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x+\alpha)}\sqrt{(x-\epsilon)}}$, il eſt clair que pour la réduction à un ſimple arc d'hyperbole, il fau-

dra que la forme ſoit ici $\frac{\mathfrak{x}^n d\mathfrak{x}}{\sqrt{(f+g\mathfrak{x}\mathfrak{x})}\cdot\sqrt{(-h+k\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$, ou $\frac{\mathfrak{x}^n d\mathfrak{x}}{\sqrt{(g\mathfrak{x}\mathfrak{x}-f)}\cdot\sqrt{(h+k\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$, deux cas qui reviennent au même.

35. Donc les cas où f & h ſeroient de même ſigne ne peuvent ſe réduire à la rectification de l'ellipſe ſeule, ni de l'hyperbole ſeule.

36. Enfin, pour la réduction à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, on a $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm f'x-xx+g'g')}} = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}\cdot\sqrt{(c+x)}}$; donc ce cas renferme les différentielles $\frac{\mathfrak{x}^n d\mathfrak{x}}{\sqrt{(f-g\mathfrak{x}\mathfrak{x})}\sqrt{(h+k\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$, ou $\frac{\mathfrak{x}^n d\mathfrak{x}}{\sqrt{(f+g\mathfrak{x}\mathfrak{x})}\sqrt{(h-k\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$. Donc les cas où f & h ſont de ſignes différens ne peuvent ſe rapporter à celui dont il s'agit ici.

37. Donc on ne peut rapporter ni à la rectification de l'ellipſe ſeule, ni à celle de l'hyperbole ſeule, ni même à celle de l'hyperbole combinée avec une quantité algébrique, le cas de $\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}d\mathfrak{x}}{\sqrt{(f+g\mathfrak{x}\mathfrak{x})}\sqrt{(h+k\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$, non plus que celui de $\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}d\mathfrak{x}}{\sqrt{(f-g\mathfrak{x}\mathfrak{x})}\cdot\sqrt{(h-k\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$.

38. L'ellipſe dont la rectification donne l'intégrale de $\frac{\mathfrak{x}^n d\mathfrak{x}}{\sqrt{(f-g\mathfrak{x}\mathfrak{x})}\cdot\sqrt{(h\mathfrak{x}\mathfrak{x}-h)}}$, ou $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{[(fk+gh)x-gkxx-fh]}}$

$= \frac{dx}{\sqrt{gk}\sqrt{\left(\frac{fk+gh}{gk}x - xx - \frac{fh}{gk}\right)}}$, ſe rapporte à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(fx-xx-g'g')}}$. Or (Mém. de Berlin, 1746, pag. 201) les demi axes r, g' de cette ellipſe ſont tels que $ff - rr = g'g'$, & les abſciſſes t priſes depuis le centre & ſur le demi axe r doivent être telles, que $rx = rr + \left(\frac{g'g'}{rr} - 1\right)tt$, $g'g'$ étant $= \frac{fh}{gk}$; donc $r = \frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ff}{4} - g'g'\right)} = \frac{fk+gh}{2gk} \pm \sqrt{\left(\frac{(fk+gh)^2}{4ggkk} - \frac{fh}{gk}\right)}$ $= \frac{fk+gh}{2gk} \pm \left(\frac{fk-gh}{2gk}\right) = \frac{2fk}{2gk}$, ou $\frac{2gk}{2gk} = \frac{f}{g}$, ou $\frac{h}{k}$, & rx ou $\frac{fx}{g} = r^2 + \left(\frac{g^2}{r^2} - 1\right)t^2 = \frac{f^2}{g^2} + \left(\frac{fh\,g^2}{gk\,f^2} - 1\right)tt$; ou $\frac{hx}{k} = \frac{h^2}{k^2} + \left(\frac{fh\,k^2}{gk\,h^2} - 1\right)tt$; donc $x = \frac{f}{g} + \left(\frac{hg^2}{kf^2} - \frac{g}{f}\right)tt$, ou $x = \frac{h}{k} + \left(\frac{k^2 f}{h^2 g} - \frac{k}{h}\right)tt$, ou enfin, en mettant pour x ſa valeur $\zeta\zeta$, $\zeta\zeta = \frac{f}{g} + \left(\frac{hg^2}{kf^2} - \frac{g}{f}\right)tt$, ou $\zeta\zeta = \frac{h}{k} + \left(\frac{k^2 f}{h^2 g} - \frac{k}{h}\right)tt$. A l'égard du demi-axe conjugué, il ſera $\sqrt{\left(\frac{fh}{gk}\right)}$.

39. L'hyperbole dont la rectification donne l'intégrale de $\frac{\zeta\zeta d\zeta}{\sqrt{(g\zeta\zeta + f\sqrt{k}\zeta\zeta - h)}}$, ou $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(gkxx + (fk-gh)x - fh)}}$ $= \frac{dx}{\sqrt{(gk)}\sqrt{\left(xx + \frac{fk-gh}{gk}x - \frac{fh}{gk}\right)}}$, ſe rapporte à la forme

forme $\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{(\pm fx+xx-gg')}}$. Or (Mém Berlin, 1746, pag. 203) les demi-axes r, g' de cette hyperbole ſont tels que $rr-g'g'=\pm f'r$, & les abſciſſes t priſes depuis le centre ſur l'axe r, ſont telles que $t=\frac{\sqrt{(rr+rx)}}{\sqrt{\left(\frac{gg}{rr}+1\right)}}$; donc $r=\pm\frac{f}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{ff}{4}+g'g\right)}$ $=+\frac{fk-gh}{2gk}\pm\sqrt{\left(\frac{(fk+gh)^2}{4g^2k^2}+\frac{fk}{gk}\right)}=+\frac{fk-gh}{2gk}\pm\left(\frac{fk+gk}{2gk}\right)=\frac{f}{g}$, ou $\frac{h}{k}$, & l'abſciſſe x ſera telle qu'on ait $z^2=\frac{\frac{ff}{g^2}+\frac{f}{g}x}{\frac{fk}{gk}\cdot\frac{gg}{ff}+1}$, ou $\frac{\frac{hh}{kk}+\frac{h}{k}x}{\frac{fh}{gk}\cdot\frac{kk}{hh}+1}$; c'eſt-à-dire, $tt=\frac{\frac{f}{g}+\xi\xi}{\frac{\lambda g^2}{kf}+\frac{g}{f}}$, ou $\frac{\frac{h}{k}+\xi\xi}{\frac{fh^2}{gk^2}+\frac{h}{\lambda}}$; d'où l'on tirera aiſément la valeur de $\xi\xi$; quant au demi-axe conjugué à r, il ſera $\sqrt{\left(\frac{fh}{gk}\right)}$.

40. Enfin l'hyperbole dont la reſtification combinée avec une quantité algébrique, donne l'intégrale de $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(g'g'\pm f'x-xx)}}$ a pour demi-axes g' & $r=\pm\frac{f}{2}+\sqrt{\left(\frac{ff}{4}+g'g'\right)}$, & pour abſciſſes $\pm$

$\frac{\sqrt{\left(rr \pm \frac{rq}{n}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{q'q'}{rr}+1\right)}}$ (Mém. Berl. 1746, pag. 203, art. 17 & 20). Donc l'hyperbole dont la rectification (combinée avec une quantité algébrique) donne l'intégrale de $\frac{\xi\tau d\tau}{\sqrt{(f+g\tau\tau)}\sqrt{(h-k\tau\tau)}}$, ou $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(fh+(gh-fk)x-gkxx)}}$ $= \frac{dx}{\sqrt{(gk)}\sqrt{\left(\frac{fh}{gk}+\frac{gh-fk}{gk}x-xx\right)}}$, aura pour demi-axes $g' = \sqrt{\frac{fh}{gk}}$, & $r = \pm\frac{gh-fk}{4gk} + \sqrt{\left(\frac{(gh-fk)^2}{4ggkk}+\frac{fh}{gk}\right)} = \frac{h}{k}$, ou $\frac{f}{g}$, & pour asymptotes $\frac{\sqrt{\left(\frac{f^2}{g^2}+\frac{ffh}{ggk\tau\tau}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{fhg^2}{gkff}+1\right)}}$, ou $\frac{\sqrt{\left(\frac{h^2}{k^2}+\frac{fhk}{gkk\tau\tau}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{fhk^2}{gkhh}+1\right)}}$; c'eſt-à-dire, $\frac{\sqrt{\left(\frac{f}{g}+\frac{hf}{gk\tau\tau}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{hg^2}{kff}+\frac{g}{f}\right)}}$, ou $\frac{\sqrt{\left(\frac{h}{k}+\frac{fh}{gk\tau\tau}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{fk^2}{ghh}+\frac{k}{h}\right)}}$.

41. L'hyperbole dont la rectification, combinée avec une quantité algébrique, donne l'intégrale de $\frac{d\tau\sqrt{(g\tau\tau-f)}}{\sqrt{(h-k\tau\tau)}}$, ou $\frac{d\tau\sqrt{(f-g\tau\tau)}}{\sqrt{(h-k\tau\tau)}}$, ſe réduit à la forme

$\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f+x)}\cdot\sqrt{[hg-k(x+f)]}}$ dans le premier cas, & $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f-x)}\cdot\sqrt{(kg-k(f-x))}}$, dans le second, c'eſt-à-dire, à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm f'x-xx+g'g')}}$, ce qui donne, dans le premier cas $f'=\frac{hg-2kf}{k}$, $g'g'=\frac{hgf-kff}{k}$, & dans le ſecond $f'=+\frac{2kf-hg}{k}$, $g'g'=\frac{hgf-kff}{k}$; or les demi-axes de cette derniere hyperbole (Mém. Berlin, 1746, pag. 203, art. XX) ſont g' & $\frac{f'}{2}+\sqrt{\left(\frac{f'f'}{4}+g'g'\right)}$, c'eſt-à-dire, $\sqrt{\left(\frac{hgf-kff}{k}\right)}$, & $\pm\frac{hg\mp 2kf}{2k}+\sqrt{\left(\frac{(hg-2kf)^2}{4kk}+\frac{4hkgf-4kkff}{4kk}\right)}=\pm\frac{hg\mp 2kf}{2k}+\frac{hg}{2k}=\frac{kg-kf}{k}$, ou f.

42. On trouvera de même les axes de l'ellipſe & ceux de l'hyperbole ſimple, dont la rectification donne l'intégrale des différentielles mentionnées ci-deſſus (articles 12 & 17); & il ne paroît pas néceſſaire de nous arrêter plus long-temps ſur cet objet.

43. Nous avons ſuppoſé pour plus de facilité dans les calculs précédens, que $f+g\zeta\zeta$ & $h+k\zeta\zeta$ étoient tous deux poſitifs; cependant s'ils étoient l'un & l'autre négatifs, ce qui n'empêcheroit pas le radical $\frac{\sqrt{(f+g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$, ou $\sqrt{(f+g\zeta\zeta)}.\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}$, d'être réel,

alors on pourroit encore ne pas prendre la peine de changer les ſignes, il faudroit faire les calculs comme ci-deſſus, en ſuppoſant $f+g\zeta\zeta=x$ dans le premier cas, & $\zeta\zeta=x$ dans le ſecond, & remarquer ſeulement que dans la transformée qui en viendroit $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$, x ſeroit négatif, & $\sqrt{x}$ imaginaire dans le premier cas, & que dans le ſecond cette transformée demeureroit la même, de ſorte qu'en faiſant $x=-u$, dans le ſeul premier cas, on auroit $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(A-Bu+Cuu)}}$, ou $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(Bu-A-Cuu)}}$, quantité dans laquelle tout eſt réel, on feroit enſuite ſur cette transformée les mêmes raiſonnemens qu'on a faits ci-deſſus ſur la transformée en x & dx.

44 Si dans la transformée $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$, on avoit $A=0$, ou $C=0$, ou $BB-4AC=0$, le radical inférieur ſe ſimplifieroit, & la différentielle ne dépendroit plus que de la quadrature, & non des arcs de ſections coniques.

45. On trouvera aiſément, ſans que nous entrions dans ce détail, quels ſont les cas où les différentielles $\frac{d\zeta\sqrt{(f+g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$, & $\frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{(f+g\zeta\zeta)}\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$, ſe transforment de cette dernière maniere. Par exemple, ſi on avoit f, g, h, k poſitifs, & $fk=gh$, on auroit $C=0$, ce qu'il eſt aiſé de voir d'ailleurs, puiſque $\zeta\zeta+$

$\frac{f}{g}$ ſeroit $=\zeta\zeta+\frac{h}{k}$, ce qui ſimplifieroit beaucoup le calcul; il en ſeroit de même ſi on avoit dans la même hypothèſe de $fk=gh$, $g\zeta\zeta-f$, & $k\zeta\zeta-h$, ou $f-g\zeta\zeta$ & $h-k\zeta\zeta$, &c. mais non, ſi on avoit $g\zeta\zeta-f$ & $k\zeta\zeta+h$, ou $f-g\zeta\zeta$ & $k\zeta\zeta+h$, &c. même en ſuppoſant $fk=gh$; dans cette derniere ſuppoſition de $fk=gh$, le calcul ſe ſimplifieroit encore ſi on avoit $f-g\zeta\zeta$ & $k\zeta\zeta-h$, parce que les radicaux ſe réduiroient à $\frac{f}{g}-\zeta\zeta=\left(\sqrt{\frac{f}{g}}+\zeta\right)\times\left(\sqrt{\frac{f}{g}}-\zeta\right)$, & à $\zeta\zeta-\frac{h}{k}=\left(\zeta+\sqrt{\frac{h}{k}}\right)\times\left(\zeta-\sqrt{\frac{h}{k}}\right)$, & que ces deux produits ont un diviſeur commun; la même choſe auroit lieu, ſi on avoit $g\zeta\zeta-f$ & $h-k\zeta\zeta$. Mais il eſt aiſé de voir que ces derniers cas ſeroient illuſoires, parce que $f-g\zeta\zeta$ & $k\zeta\zeta-h$, ainſi que $g\zeta\zeta-f$ & $h-k\zeta\zeta$, ne pourroient être tous deux réels (dans la ſuppoſition de $fk=gh$, où $\frac{f}{g}=\frac{h}{k}$), que dans le ſeul cas de $\zeta=\frac{f}{g}=\frac{h}{k}$, ainſi ζ ne pourroit être regardé comme variable.

46. On trouvera par les mêmes méthodes que ci-deſſus, les cas où $\frac{d\zeta\sqrt{(f+g\zeta\zeta)}}{\zeta\zeta\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$ eſt réductible à des arcs ſeuls d'ellipſe ou d'hyperbole. Il ſuffit pour cela de ſuppoſer $\frac{1}{\zeta}=u$, & la différentielle propoſée ſe réduira au cas de $\frac{du\sqrt{(f'+g'uu)}}{\sqrt{(h'+k'uu)}}$.

47. Il en ſera de même encore de la différentielle $\frac{dz}{(m+nzz)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$; car en faiſant $\frac{z}{\sqrt{(m+nzz)}} = u$, elle ſe réduit à la forme $\frac{du\sqrt{(A+Buu)}}{\sqrt{(C+Duu)}}$.

48. Il en ſera de même encore de $\frac{dp\sqrt{(\alpha+\zeta \sin p^2+\gamma \cos p^2)}}{\sqrt{(\alpha+\mu \sin p^2+\nu \cos p^2)}}$, diviſé par ſin. p^2, ou par cof. p^2; car il n'y a qu'à faire dans le premier cas ſin. $p = \sqrt{(1-uu)}$, ou cof. $p = u$, & dans le ſecond cof. $p = \sqrt{(1-uu)}$, ou ſin. $p = u$, & on aura une transformée de cette forme $\frac{du}{(1-uu)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{(\alpha'+\zeta' uu)}}{\sqrt{(\alpha'+\gamma' uu)}}$, qui ſe réduit à la forme précédente.

49. Il en ſera de même de $\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)}\cdot\sqrt{(h+kzz)}}$, comme on le verra aiſément en faiſant $\frac{1}{z} = u$, car la transformée ſera de la forme $\frac{uudu}{\sqrt{(A+Buu)}\cdot\sqrt{(C+Duu)}}$.

50. Il en ſera de même encore de $\frac{zzdz}{(m+nzz)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}\cdot\sqrt{(h+kzz)}}$, comme on le verra en ſuppoſant $u = \frac{z}{\sqrt{(m+nzz)}}$, qui donne $\frac{dz}{(m+nzz)^{\frac{1}{2}}} =$

$\frac{du}{m}$, $\zeta\zeta = \frac{mu^2}{1-nu^2}$, & une transformée de la forme $\frac{uudu}{\sqrt{(A+Buu)}\sqrt{(C+Duu)}}$.

51. M. Euler, dans les Tomes VIII & X des nouveaux Mém. de Peterſbourg, déja cités, trouve que $\frac{d\zeta\sqrt{(f+g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(h+k\zeta\zeta)}}$ eſt intégrable par des arcs de ſections coniques, combinés avec des quantités algébriques, dans les cas mêmes, où nous avons dit ci-deſſus que ces quantités ſont intégrables par des arcs ſimples d'ellipſe ou d'hyperbole. Cela vient de ce que par les théorêmes de M. Euler, & avant lui, du Comte Fagnani, on peut toujours trouver un ſimple arc d'ellipſe ou d'hyperbole, qui ſoit égal à un autre arc de la même ellipſe ou de la même hyperbole, combiné avec une quantité algébrique. Voyez les Mém. déja cités, & ſur-tout le Volume VI de ces mêmes Mémoires.

52. En effet, ſoit, par exemple, $\frac{d\zeta\sqrt{(f\pm g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(h-k\zeta\zeta)}}$, l'élément d'un arc d'ellipſe, & ſoit ſuppoſé avec M. Euler, $\frac{h-k\zeta\zeta}{f\pm g\zeta\zeta} = xx$, on aura $h-k\zeta\zeta = fxx \pm g\zeta\zeta xx$, & $\frac{h-fxx}{k\pm gxx} = \zeta\zeta$; donc en différentiant l'équation $h-k\zeta\zeta = fxx \pm g\zeta\zeta xx$, on aura $-k\zeta d\zeta - fxdx = \pm gxx\zeta d\zeta \pm g\zeta\zeta xdx$, & en diviſant par $x\zeta$, $\pm gd(x\zeta) = -\frac{kd\zeta}{x} - \frac{fdx}{\zeta} = -\frac{kd\zeta\sqrt{(f\pm g\zeta\zeta)}}{\sqrt{(h-k\zeta\zeta)}} -$

$\frac{fdx\sqrt{(k\pm fxx)}}{\sqrt{(k-fxx)}}$, d'où il eſt clair qu'on aura l'intégrale du dernier membre de cette équation, puiſque l'intégrale du premier membre eſt $\pm gxz+A$. Or le dernier membre eſt la ſomme de deux arcs d'ellipſe; cela eſt évident (art. 17) ſi on a $+g$, & ſi on a $-g$, il eſt clair que le premier terme étant (*hyp.*) un arc d'ellipſe, on a (art. 15) $fk>gh$, ou $\frac{f}{g}>\frac{h}{k}$; donc $\frac{k}{g}>\frac{h}{f}$; donc dans le ſecond membre kf eſt auſſi $>gh$.

53. On peut remarquer de plus que les deux ellipſes ſont ſemblables, car $\frac{\sqrt{(f\pm gzz)}}{\sqrt{(k-kzz)}}=\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{k}}\times\frac{\sqrt{\left(1\mp\frac{g}{f}zz\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{kzz}{k}\right)}}$, & $\frac{\sqrt{(k\pm gxx)}}{\sqrt{(k-fxx)}}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}}\times\frac{\sqrt{\left(1\pm\frac{g}{k}xx\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{f}{k}xx\right)}}$; or $\frac{gzz}{f}=\frac{kzz}{k}\times\frac{kg}{kf}$, & $\frac{gxx}{k}=\frac{fxx}{k}\times\frac{kg}{kf}$. Donc ſi on fait $\frac{kzz}{k}=uu$, & $\frac{fxx}{k}=yy$, on aura $\frac{gzz}{f}=\frac{kg}{kf}uu$, & $\frac{gxx}{k}=\frac{kg}{kf}y^2$; donc les deux radicaux ſeront $\frac{\sqrt{(1\pm Au^2)}}{\sqrt{(1-u^2)}}$ & $\frac{\sqrt{(1\pm Ay^2)}}{\sqrt{(1-y^2)}}$. Donc, &c.

54. Il en ſera de même pour l'hyperbole, comme il réſulte, tant des théorêmes de MM. Fagnani & Euler,

Euler, que de ce que nous avons démontré nous-mêmes dans le Tome V de nos *Opuſcules*, pag. 242, & dans les Mém. de Turin, Tome IV, pag. 151 de la partie Mathématique, & nous remarquerons à cette occaſion qu'on trouvera dans les endroits cités, la maniere de faire diſparoître dans la transformée $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm f'x - xx + g'g')}}$, les quantités infimes, dont la différence eſt finie, & les changer en deux quantités finies.

55. Puiſque la différentielle $\frac{dz\sqrt{(f\pm gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, qui dépend d'un ſimple arc d'ellipſe, peut ſe transformer en un autre arc de la même ellipſe, combiné avec une quantité algébrique, il eſt clair qu'on pourra opérer une transformation ſemblable ſur la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f'x - xx - g'g')}}$, qui réſulte de la précédente, & qui dépend auſſi d'un ſimple arc d'ellipſe. Il ſuffira pour cela de faire $zz = u$, & $\frac{h-ku}{f\pm gu} = y$, ce qui donnera $h - ku = fy \pm guy$, $u = \frac{h-fy}{k\pm gy}$, $-kdu - fdy = \pm gudy \pm gydu$, & en diviſant par $2\sqrt{(uy)}$, on aura $\pm g\,d[\sqrt{(uy)}] = -\frac{kdu}{2\sqrt{u}\cdot\sqrt{y}} - \frac{fdy}{2\sqrt{y}\cdot\sqrt{u}} =$

$$-\frac{kdu}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{\sqrt{(f\pm gu)}}{\sqrt{(h-ku)}} - \frac{fdy}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{(k\pm gy)}}{\sqrt{(h-fy)}}, =$$

$\frac{k\,du\sqrt{f}}{2\sqrt{h}\cdot\sqrt{u}} \times \frac{\sqrt{\left(1 \pm \frac{gu}{f}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{ku}{h}\right)}} - \frac{f\,dy\sqrt{k}}{2\sqrt{y}\cdot\sqrt{h}} \times \frac{\sqrt{\left(1 \pm \frac{gy}{k}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{fy}{h}\right)}}$. Suppoſant enſuite $1 \pm \frac{gu}{f} = z$, & $1 \pm \frac{gy}{k} = s$, on aura évidemment (article 53) deux transformées de la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(fx - xx - g'g')}}$, qui étant combinées enſemble, donneront une intégrale algébrique. Donc, &c.

56. Nous avons prouvé dans les Mém. de Berlin, 1746, que la différentielle $\frac{du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{(f+gu)}\cdot\sqrt{(h+ku)}}$, dépend toujours d'un arc d'ellipſe & d'un arc d'hyperbole, & que $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(f+gu)}\cdot\sqrt{(h+ku)}}$, dépend, ou des arcs de ces deux ſections coniques, ou de la rectification d'une ſeule, ſelon la nature des coefficiens f, g, h, k, c'eſt-à-dire, dans les cas où la quantité $fh + (gh + fk)u + gkuu$ peut ſe réduire, ou non, à l'une de ces trois formes, $f'u - gg - \alpha uu$, $\pm f'u - gg \pm \alpha uu$, $\pm fu + gg - \alpha uu$.

57. Maintenant on obſervera que la quantité $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, ſe change (en faiſant $zz = u$, en $\frac{du\sqrt{(f+gu)}}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{(h+ku)}}$) $= \frac{f\,du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{(f+gu)}\sqrt{(h+ku)}} +$

$\frac{g\,du\sqrt{u}}{\sqrt{(f+gu)}\,\sqrt{(h+ku)}}$; j'appelle $A\,du$ la premiere de ces deux dernieres différentielles, & $B\,du$ la ſeconde. Donc dans le cas où $\frac{dz\sqrt{(f+gz)}}{\sqrt{(h+kz)}} = \frac{du\sqrt{(f+gu)}}{\sqrt{u}\sqrt{(h+ku)}}$ ſe réduira à l'arc d'une ſeule ſection conique, il eſt clair que comme $A\,du$ dépend toujours de deux arcs, & $B\,du$ tantôt de deux, tantôt d'un ſeul, il faudra lorſque $B\,du$ dépend d'un ſeul arc, que l'un des deux arcs diſparoiſſe dans la combinaiſon des quantités $A\,du + B\,du$, & dans le cas où $\frac{dz\sqrt{(f+gz)}}{\sqrt{(h+kz)}}$ ſe réduit à la rectification de deux ſections coniques, & par conſéquent où $B\,du$ peut dépendre de deux arcs, il faudra qu'ils ſoient les mêmes que pour $A\,du$; car ſans cela, ou les arcs de la même ſection conique ne pourroient dans le premier cas ſe détruire dans $A\,du + B\,du$, ou dans le ſecond la différentielle dépendroit de deux arcs d'ellipſe différens, & de deux arcs d'hyperbole différens. Sur quoi voyez les Mém. de Berlin, 1746, où cette vérité eſt prouvée d'une autre maniere, & par un calcul direct pour tous les cas.

58. Soit la quantité complexe, $\frac{\alpha\,dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(\zeta+\gamma x+\delta xx)}} + \frac{\varphi\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\zeta+\gamma x+\delta xx)}}$, dans laquelle α, ζ, γ, δ, φ, ſont des coefficiens conſtans, on la changera en celle-ci $\frac{\alpha\,dx+\varphi x\,dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(\zeta+\gamma x+\delta xx)}}$. Soit $\alpha+\varphi x = u$, la transformée ſera de cette forme $\frac{u\,du}{\sqrt{(A+Bu+Cu^2+Du^3)}}$, &

pour qu'elle ſe réduiſe a la rectification d'une ſeule ſection conique, il faut, 1°. qu'elle puiſſe ſe réduire à cette forme $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(E+Fu+Gu^2)}}$, ce qui donne $A=0$; 2° que $E+Fu+Gu^2$ ſe réduiſe à la forme $fu-gg-\alpha uu$, ou $\pm fu-gg+\alpha uu$, ou $\pm fu+gg-\alpha uu$.

59. Si on a une différentielle de cette forme $\frac{d\zeta\sqrt{(A+C\zeta\zeta)}}{D+E\zeta\sqrt{(F+G\zeta\zeta)+H\zeta\zeta}}$, elle ſe réduira à des arcs de cercle ou à des logarithmes, il ſuffit pour cela de multiplier haut & bas par $D-E\zeta\sqrt{(F+G\zeta\zeta)+H\zeta\zeta}$, ce qui donnera aux termes les plus compliqués de la différentielle, cette forme

$$\frac{2d\zeta\sqrt{(A+C\zeta\zeta)}\cdot\sqrt{(F+G\zeta\zeta)}}{L+M\zeta^2+N\zeta^4}=\frac{2d\zeta\sqrt{(P+Q\zeta\zeta+S\zeta^4)}}{L+M\zeta^2+N\zeta^4}.$$

Faiſant enſuite $\zeta\zeta=u$, & faiſant diſparoître le radical $\sqrt{(P+Qu+Su^2)}$, on n'aura plus que des fractions rationnelles dans la différentielle.

60. Donc il en ſera de même & par les mêmes raiſons de du ſin. u ou du cof. u multiplié par

$$\frac{\sqrt{(D'+G'\text{ cof. }2u)}}{E'+F'\text{ ſin. }2u+N'\text{ cof. }2u}\times M'+P'\text{ ſin. }2u+Q'\text{ cof. }2u.$$

Car ſoit cof. $u=x$, on aura dans le premier cas la transformée $\frac{dx\sqrt{(A+Bxx)}}{L+Nx\sqrt{(1-xx)+Pxx}}\times Q+R\times\sqrt{(1-xx)+Sxx}$, & en multipliant haut & bas par $L+Pxx-Nx\sqrt{(1-xx)}$, les termes les plus compliqués de la différentielle ſeront de la forme

$$\frac{x^k dx\sqrt{(A+Bxx)}\cdot\sqrt{(1-xx)}}{G+Hxx+Fx^4} = \frac{x^k dx\sqrt{(P+Qxx+Sx^4)}}{G+Hxx+Fx^4},$$

k étant un nombre entier, & dans le second cas, on aura une pareille transformée en supposant sin. $u = x$. Donc, &c.

61. Voici encore d'autres différentielles réductibles à des arcs de sections coniques. Nous avons fait voir dans les Mém de Berlin, qu'en général $x^{\frac{n}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}}$ est réductible à de tels arcs, n & m étant des nombres impairs positifs ou négatifs. Or, soit proposée la différentielle $x^{\frac{p}{2}}dx\times\int x^{\frac{n}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}}$, p étant un nombre pair ou impair, positif ou négatif, il est clair que l'intégrale sera $\frac{x^{\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2}+1}\times\int x^{\frac{n}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}} - \int x^{\frac{\rho}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}}$, ρ étant un nombre pair ou impair, positif ou négatif. Or, si ρ est un nombre pair, la différentielle du second terme s'intégre par des logarithmes ou des arcs de cercle, & si ρ est un nombre impair, elle s'intégre par des arcs de sections coniques. Donc en général toute différentielle de cette forme $x^{\frac{p}{2}}dx\times\int x^{\frac{n}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}}$, p, n, m étant pairs ou impairs, s'intégre par des arcs de sections coniques. Il n'y a que le seul cas où $\frac{p}{2} = -1$ qui ne puisse s'intégrer par cette méthode.

62. Il eſt clair qu'on peut trouver par cette méthode, & par les formules des Mém. de Berlin, de 1746 & 1748, une très-grande quantité de différentielles de la forme $Xdx\int\xi dx$, qui ſeront réductibles à des arcs de ſections coniques, en ſuppoſant $\int\xi dx$ réductibles à de tels arcs. Nous nous contentons d'indiquer la méthode dont il eſt très-facile de faire uſage, & nous nous bornerons ici à dire que, ſi $\int\xi dx$ eſt réductible à des arcs de ſections coniques, & que $\int\xi dx(ax+b)^q$ le ſoit auſſi, a, b étant quelconques, & q un nombre entier ou fractionnaire, poſitif ou négatif, la quantité $Xdx\int\xi dx$ ſera auſſi intégrable par des arcs de ſections coniques, ſi X peut être réſolu en différens termes de la forme $x^r(a'x+b')^r$, r étant un nombre entier poſitif; & ainſi du reſte.

63. On trouvera de même que $x^{\frac{m}{n}}\times[\int x^{\frac{p}{n}}dx\times\int x^{\frac{q}{n}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{n}}]$ eſt réductible à des arcs de ſections coniques, q, p étant des nombres pairs ou impairs; & on pourra étendre cette recherche beaucoup plus loin.

64. Nous avons fait voir dans les Mém de Berlin, de 1746, pag. 211, art. XXIX, que la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(a+bx+cxx)}}$ ne dépend que de $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}$; d'où il s'enſuit que ſi $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ eſt de la forme $\sqrt{(fx-xx-gg)}$, ou $\sqrt{(xx-gg\pm fx)}$, ou $\sqrt{(gg\pm fx-xx)}$, la différentielle

$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(a+bx+cxx)}}$ ne dépendra que de la rectification de l'ellipſe dans le premier cas, & dans le ſecond, de celle de l'hyperbole, d'où il s'enſuit qu'une différentielle de cette forme $\frac{Adx}{x^{\frac{1}{2}}} \times \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}$, ne dépendra que de la rectification de l'ellipſe ou de celle de l'hyperbole, ſi $a+bx+cxx$ a l'une des formes ſuſdites, en effet, l'intégrale ſera de cette forme, $\frac{B}{x^{\frac{1}{2}}}\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}} + C\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(a+bx+cxx)}}$. Donc, &c.

65. Il en ſeroit de même, & par les mêmes raiſons, ſi on avoit à intégrer en général $\frac{Adx}{x^{\frac{p}{2}}} \times \int \frac{x^{\frac{q}{2}}dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}$, $a+bx+cxx$ ayant les ſuſdites conditions, p & q étant des nombres entiers, pairs ou impairs, & $\frac{q}{2} - \frac{p}{2} + 1$ étant $= -\frac{3}{2}$, ou $+\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, $\frac{q}{2}$ étant $= \frac{p}{2} - 1 - \frac{3}{2}$, ou $\frac{p}{2} - \frac{1}{2}$. On remarquera ſeulement que p ne ſauroit être $= -2$, parce qu'alors $\frac{dx}{x^{\frac{p}{2}}}$ ne ſeroit intégrable que par logarithmes.

66. M. le Comte Fagnani, & après lui M. Euler, ont fait voir que $\frac{dx\sqrt{(1-nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}}$ étant la différentielle

d'un arc d'ellipſe, dans laquelle 1 eſt le demi-axe, x l'abſciſſe, $n = 1 - q$, q étant le demi-parametre du demi-axe 1, ſi on fait $\frac{\sqrt{(1-nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{u}$, ce qui donne $\frac{\sqrt{(1-nuu)}}{\sqrt{(1-uu)}} = \frac{1}{x}$, on aura $\int \frac{dx\sqrt{(1-nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}} + \int \frac{du\sqrt{(1-nuu)}}{\sqrt{(1-uu)}} = nxu + A$, A étant une conſtante. Voyez nouv. Mém. de Peterſb. Tom. VI. Maintenant l'équation $\frac{1-nxx}{1-xx} = \frac{1}{u^2}$, donne, comme il eſt aiſé de le voir, $1 - nxx = \frac{1-n}{1-nuu}$; d'où il s'enſuit que $\log.(1-nxx) = \log.(1-n) - \log.(1-nuu)$. Donc ſi on avoit à intégrer une quantité de cette forme $\int \frac{dx\sqrt{(1-nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}} \times M \log.(1-nxx)B$, il eſt clair qu'en combinant enſemble les deux différentielles $\frac{dx\sqrt{(1-nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}} \times M \log.(B - Bnxx) - \frac{Mdu\sqrt{(1-nuu)}}{\sqrt{(1-uu)}} \times \log.(B - Bnuu)$, elles deviendroient $\frac{dx\sqrt{(1-nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}} \times M \log.(B^2 - B^2n) - nd(xu) \log.(B - Bnuu)$; or, en intégrant par parties, & mettant pour xu ſa valeur en u, puis faiſant $uu = z$, tout ſe réduit à des arcs de ſections coniques. Si n étoit négatif, en ſorte que l'élément de l'ellipſe fût $\frac{dx\sqrt{(1+nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}}$, il faudroit

faudroit mettre log. $(1+nxx)$ au lieu de log. $(1-nxx)$; & le réſultat ſeroit d'ailleurs le même.

67. Si on ſait $1-nxx=\zeta$ ou $1+nxx=\zeta$, on aura $xx=\frac{1-\zeta}{n}$, ou $\frac{\zeta-1}{n}$, & $\frac{dx\sqrt{(1\mp nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}}$ ſera $-\frac{d\zeta\sqrt{\zeta}}{2\sqrt{(1-\zeta).\sqrt{(n-1+\zeta)}}}$, ou $\frac{d\zeta}{2\sqrt{(\zeta-1).\sqrt{(n+1-\zeta)}}}$; de plus l'équation $\frac{\sqrt{(1\mp nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{1}{u}$, donnera [en faiſant $\sqrt{(1\mp nuu)}=\sqrt{t}$] $\frac{\sqrt{\zeta}\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1+\zeta)}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(1-t)}}$, ou $\frac{\sqrt{\zeta}.\sqrt{n}}{(n+1-\zeta)}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(1-t)}}$, d'où l'on tire en réduiſant $t\zeta=1-n$, ou $t\zeta=n+1$; donc ſi on a la quantité $\frac{d\zeta\sqrt{\zeta}}{\sqrt{(1-\zeta)}\sqrt{(n-1+\zeta)}}\times\int\frac{d\zeta}{\zeta}$ à intégrer, on pourra parvenir à un réſultat ſemblable à celui de l'article 66.

68. Soit $Auuxx+Buu+Cxx+D=0$, on aura, en différentiant $A(x\,du+u\,dx)+B\int\frac{du}{x}+C\int\frac{dx}{u}=0$, $u=\sqrt{\left(\frac{-D-Cxx}{Axx+B}\right)}$, & $x=\frac{\sqrt{(-D-Buu)}}{\sqrt{(Auu+C)}}$, où il faut remarquer qu'on ne peut ſuppoſer à-la-fois D & C négatifs, ni D & B négatifs, donc ſi on a deux quantités de cette forme $\frac{dx\sqrt{(Axx+B)}}{\sqrt{(-D-Cxx)}}+\frac{du\sqrt{(Auu+C)}}{\sqrt{(-D-Buu)}}$ à intégrer, on pourra en venir à bout par une méthode ſemblable à

celle du Comte Fagnani, & comme en général nous avons vu que $\frac{dx\sqrt{(f+gxx)}}{\sqrt{(h+kxx)}}$ eſt réductible à des arcs de ſections coniques, il s'enſuit qu'on pourroit peut-être tirer de-là une méthode pour comparer entr'eux non-ſeulement des arcs d'ellipſe & des arcs d'hyperbole ſéparément, mais des arcs d'ellipſe & d'hyperbole pris enſemble. C'eſt une recherche que j'abandonne à d'autres Mathématiciens.

69. Si dans l'équation $Aauxx+Buu+Cxx+D=0$, u & x entrent de la même maniere, c'eſt-à-dire, ſi $C=B$, la valeur de u en x ſera ſemblable à celle de x en u, & on aura encore $\int xdu+\int udx$, ou $\int\frac{dx\sqrt{(-D-Bxx)}}{\sqrt{(Ax^2+B)}}+\int\frac{du\sqrt{(-D-Bu^2)}}{\sqrt{(Au^2+B)}}=xu$, d'ou l'on peut tirer encore de nouveaux théorèmes.

70. En général, ſoit $Au^nx^n+Bx^n+Cu^n+D=0$, & ſuppoſons $B=C$, afin que les u & les x entrent de la même maniere dans l'équation, on aura $u^n=\frac{-D-Bx^n}{Ax^n+B}$ & $x^n=\frac{-D-Bu^n}{Au^n+B}$, de ſorte qu'on pourra comparer par cette méthode les arcs d'une courbe, ſi ces arcs ſont $\int\frac{dx}{u}$ & $\int\frac{du}{x}$ ou $\int udx$ & $\int xdu$.

71. On ſait que la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(e+6x+3x^2+4x^3+x^4)}}$ eſt réductible à des arcs de ſections coniques. On ſait de plus que ſi on a l'équa-

tion $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}} =$

$\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+dy^3+ey^4)}}$, on peut trouver (voyez Mém. de Peterſbourg & de Turin) une équation algébrique entre x & y, il ſemble qu'on pourroit encore tirer de-là quelques théorêmes pour comparer entr'eux des arcs de ſections coniques.

72. Suppoſons un cercle dont a ſoit le rayon, & x l'abſciſſe priſe depuis le centre, l'arc de la trochoide de ce cercle, tant ſimple, qu'allongée ou accourcie, aura pour élément $\sqrt{\left(\frac{n^2a^2dx^2+x^2dx^2}{aa-xx}\right)} =$

$\frac{n\,dx\sqrt{\left(a^2+\frac{x^2}{n^2}\right)}}{\sqrt{(aa-x^2)}}$, qui eſt évidemment égal à un arc d'ellipſe, dans laquelle $n^2 = \frac{p-2a}{2a}$, p étant le parametre de l'axe $2a$.

73. Dans une trochoide d'ellipſe, ſuppoſant $\frac{p-2a}{2a} = m$, on aura pour l'élément de l'arc

$\frac{\sqrt{(n^2a^2dx^2+n^2m^2x^2dx^2+x^2dx^2)}}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{n\,dx\sqrt{\left[aa+m^2x^2+\frac{x^2}{n^2}\right]}}{\sqrt{(aa-xx)}}$,

égal à un arc d'ellipſe dans laquelle $\frac{p-2a}{2a} = m^2 + \frac{1}{n^2}$.

74. Dans la cycloïde allongée ou accourcie, l'élé-

ment de l'arc eſt $= \sqrt{\left(\frac{(n^2dx+xdx)^2}{aa-xx}+dx^2\right)} = \frac{dx\sqrt{(n^2a^2+2nax+a^2)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$. Soit $n^2a^2+2nax+a^2=az$, on aura $x=\frac{az-aa-n^2a^2}{2na}$, & la transformée ſera de la forme $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{[4nna^2z-a^4(1+n^2)^2-aazz+2a^3(1+nn)z]}}$, dans laquelle le terme affecté de z eſt poſitif, le terme affecté de zz négatif, & le terme conſtant néganf, puiſque $2n$ eſt toujours $<1+n^2$, la quantité $(1-2n+n^2)=(1-n)^2$ étant toujours poſitive. On voir donc que la rectification des cycloïdes allongées ou accourcies, ſe réduit à la forme $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(fz-bb-zz)}}$, qui dépend de la rectificarion de l'ellipſe ſeule. Ce qu'on ſavoit d'ailleurs.

75. Dans les Mém. de l'Acad. de 1708, pag. 88, on trouve que la rectification des épycycloïdes, tant allongées qu'accourcies, ſe réduit à l'intégration de la formule $\frac{dx\sqrt{[(a+c)^2-2cx]}}{\sqrt{(2ax-xx)}} = \frac{dx\sqrt{[(a+c)^2-2cx)}}{\sqrt{[a^2-(a-x)^2]}}$, ſi donc on fait $(a+c)^2-2cx=2cz$, ce qui donne $x=\frac{(a+c)^2}{2c}-z$, la différentielle deviendra $\frac{dz\sqrt{2c}\sqrt{z}}{\sqrt{\left[a^2-\left(z-\frac{aa-cc}{2c}\right)^2\right]}}$, qui ſe réduit évidemment à la forme $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(fz-gg-zz)}}$, puiſque a^2 eſt évidemment

$< \frac{(a^2+c^2)}{2c}$, $a^4 - 2aacc + c^4$ étant toujours une quantité positive. Ainſi la différentielle propoſée ſe réduit, comme on ſait d'ailleurs, à la rectification de l'ellipſe.

76. En général, ſoit la quantité à intégrer $\frac{dx\sqrt{(b \pm x)}}{\sqrt{(a+cx+exx)}}$, & ſoit $b \pm x = z$, on aura pour transformée $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a \mp cb + eb^2 \pm cz + ezz - 2ezb)}}$. Soit $c = 0$, ce qu'on peut toujours ſuppoſer, & qui ne rendra pas la différentielle plus compliquée, la transformée ſera $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a+eb^2 - 2ezb + ezz)}}$, réductible à la rectification de l'ellipſe, ſi e eſt négatif, b négatif, & $a + eb^2$ négatif, & ainſi du reſte. Voyez les Mémoires de Berlin, 1746.

LIII. MÉMOIRE.

Sur l'attraction des ſphéroïdes elliptiques.

L'EXCELLENT Mémoire de M. de la Grange ſur ce ſujet, imprimé dans les Mém. de l'Acad. de Berlin, pour l'année 1773, m'a fait repenſer encore au problême de l'attraction des ſphéroïdes elliptiques, dont je m'étois déja fort occupé dans le VIe Volume de mes *Opuſcules*. Voici le réſultat de mes nouvelles recherches ſur cet objet. Comme elles ſont une ſuite de celles du Volume précédent, je ſuppoſerai qu'on ait ſous les yeux ce Volume & les Figures qui s'y rapportent.

§. I.

Démonſtration d'un théoréme de M. Maclaurin.

1. Ce théorême eſt celui ſur lequel j'avois formé quelques doutes dans le Volume cité, pag. 242 & 243, mais ſimplement des doutes, parce que l'analyſe

que j'avois ſuivie ne me paroiſſoit pas conduire à ce théorême. Ayant depuis examiné la choſe plus attentivement, j'ai trouvé que cette analyſe donnoit en effet, & même aſſez facilement, le théorême dont il s'agit, & j'en fis part à M. de la Grange, le 15 Septembre 1775, comme on le peut voir aux pages 308 & 312 des Mém. de l'Académie de Berlin, pour l'année 1774. Mais n'ayant fait qu'indiquer dans ce Volume la méthode analytique, par laquelle je ſuis parvenu à la démonſtration de ce théorême, je crois devoir la développer ici dans tout le détail qu'elle exige, & y joindre même quelques autres remarques relatives à cette propoſition.

2. Soit donc (Tom. VI, *Opuſc.* p. 233) $\omega^2 - \gamma^2 = k^2$; & le calcul de l'attraction d'un ſphéroide elliptique ſur un point placé dans ſon axe, ſe réduira à l'intégration de la quantité $\frac{2cdZ \times d\zeta \sin\zeta' \cos\zeta' \sqrt{(1+k^2\sin\zeta'^2)}}{1+\omega^2\sin\zeta'^2}$.

3. En mettant d'abord à part la quantité conſtante $2cdZ$, & ſuppoſant $k \sin. \zeta' = u$, & $\sqrt{(1+uu)} = t$, on aura à intégrer la quantité $\frac{t^2 dt}{k^2\left(1+\frac{\omega^2 t^2 - \omega^2}{k^2}\right)} = ($en réduiſant & mettant $-\gamma^2$ pour $k^2 - \omega^2$) $\frac{t^2 dt}{\omega^2\left(t^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)} =$

$$\frac{dt}{\omega^2} + \frac{\gamma^2 dt}{\omega^4\left(t^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)} = \frac{1}{\omega^2}\left(dt + \frac{\gamma^2 dt}{\omega^2\left(t^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)}\right).$$

4. L'intégrale de cette quantité doit être nulle lorſque $\zeta = 0$, ou $u = 0$, ce qui donne $t = 1$, & complette lorſque aL (*Fig.* 35, Tom. VI, *Opuſ.*) $= 0$, ou $t = 0$.

5. Je remarque maintenant que ſi $\frac{\gamma^2}{\omega^2}$ eſt le même dans deux différens ſphéroïdes, l'intégrale $\int\left(dt + \frac{\gamma^2 dt}{\omega^2\left(t^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)}\right)$ y ſera la même; & que par conſéquent les attractions élémentaires des deux ſphéroïdes (Tom. VI, *Opuſc.* pag. 233) ſeront entr'elles comme $\frac{cdZ}{\omega^2}$ à $\frac{cdZ'}{\omega'^2}$; il faut donc trouver le rapport de ces deux quantités différentielles, & chercher dans quel cas ce rapport peut être conſtant.

6. Or, puiſque $\frac{\gamma^2}{\omega^2}$, ou $\frac{\omega^2}{\gamma^2}$ eſt le même (*hyp.*) dans les deux ſphéroïdes, ſi on met pour γ^2 & pour ω^2 leurs valeurs $\frac{b^2}{b^2}$ & $\frac{c^2 - b^2}{bb}$, & qu'on faſſe $\frac{\omega^2}{\gamma^2}$, ou $\frac{c^2 - b^2}{bb} = u'u'$, $u'u'$ ſera le même pour les deux ſphéroïdes, & $\frac{dZ}{\omega^2}$ ſera $= \frac{dZ}{bbu'u'}(cc - bbu'u')$.

7. De plus, à cauſe de $\frac{cc - bb}{bb} = u'u'$, & de $b'b' = \frac{bb}{1 + \text{fin } Z^2\left(\frac{bb}{cc} - 1\right)}$, on aura la valeur de dZ

en

en u & du, & l'on trouvera, après les ſubſtitutions & réductions, $\frac{dZ}{\delta\delta u\,u}(cc-\delta\delta u'u') = \frac{bb\,du'}{u'} \times$

$$\frac{1}{\sqrt{(b^2-c^2+f^2u^2)}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{a^2}-b^2-\frac{b^2u^2f^2}{a^2}\right)}},$$

8. Or il eſt aiſé de voir que cette quantité ſera la même pour les deux ſphéroïdes, à un coefficient conſtant près (ſavoir ba), ſi on a $cc-bb$ le même pour les deux ſphéroïdes, ainſi que $cc-aa$, la diſtance δ étant ſuppoſée auſſi la même pour les deux ſphéroïdes.

9. Donc on aura $cc-bb=CC-BB$, & $cc-aa=CC-AA$, ou, ce qui revient au même, $a^2-b^2=A^2-B^2$.

10. Donc dans cette hypothèſe de $cc-bb=CC-BB$, & de $b^2-a^2=B^2-A^2$, les attractions des deux ſphéroïdes à la même diſtance δ, ſeront entr'elles en raiſon donnée.

11. Il eſt viſible de plus (en remettant la conſtante c qui doit entrer dans l'expreſſion de l'attraction du ſphéroïde (art. 2)) que l'attraction ſera proportionnelle à bca, c'eſt-à-dire, à la ſolidité du ſphéroïde.

12. Ainſi le théorême de M. Maclaurin, ſur lequel j'avois propoſé quelques doutes (pag. 242 de l'Ouvrage cité) eſt exactement vrai.

13. Comme la quantité $\frac{dZ}{\delta^3}$, ou (art. 7)

$$\frac{\frac{bb\,du}{uu\sqrt{\left(uu+\frac{bb-aa}{aa}\right)}}\times\frac{a}{b}\times\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c^2-a^2}{b^2}-u^2\right)}}}{},$$

dépend évidemment des logarithmes ou des arcs de cercle, on pourroit croire d'abord que la détermination de l'attraction d'un ſphéroïde à coupes elliptiques, ne dépend auſſi que des arcs de cercle ou des logarithmes.

14. Mais il eſt aiſé de voir que l'intégrale de $\frac{y^3\,dz}{a^4\left(z^2-\frac{y^2}{a^2}\right)}$ renferme un coefficient $\frac{y}{u}$, qui, multipliant la différentielle ci-deſſus, y introduira $\frac{du}{uu}$ au lieu de $\frac{du}{u}$, à cauſe de $\frac{y}{u}=\frac{a}{\sqrt{(cc-b'b')}}=\frac{1}{u}$. Or l'introduction de ce nouvel u rendra la quantité $\frac{dZ}{u^3}$ intégrable par des arcs de ſections coniques, comme il eſt aiſé de le voir en faiſant $u=\frac{y}{\chi}$, & $\chi=\sqrt{y}$.

15. Voici une autre maniere, moitié analytique, moitié ſynthétique, de démontrer la propoſition de M. Maclaurin.

16. Il eſt aiſé de voir que les deux attractions ſeront entr'elles comme $\frac{dZ}{u^3}$ à $\frac{dZ'}{u'^3}$, c'eſt-à-dire (à cauſe de $\frac{a^3}{y^3}=\frac{a'^3}{y'^3}$) comme $\frac{dZ}{y^3}$ à $\frac{dZ'}{y'^3}$, ou comme

$dZ.Bb$ à $dZ'.B'B'$, ou enfin comme

$$\frac{dZ.bb}{1+\text{fin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)}, \text{ à } \frac{dZ'.BB}{1+\text{fin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)},$$

17. La difficulté ſe réduit donc à prouver que $\frac{dZ}{1+\text{fin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)}$ eſt à $\frac{dZ'}{1+\text{fin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)}$ en raiſon conſtante.

18. Or, en ſuppoſant pour plus de ſimplicité que les diſtances δ, D ſoient les mêmes de part & d'autre, l'équation $cc - \frac{bb}{1+\text{fin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)} = CC - \frac{BB}{1+\text{fin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)}$, donne, comme il eſt aiſé de le voir par la différentiation, $\frac{dZ \text{ fin. } Z \text{ cof } Z}{\left[1+\text{fin } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]^2}$ en raiſon conſtante avec $\frac{dZ' \text{ fin } Z' \text{ cof. } Z'}{\left[1+\text{fin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]^2}$.

19. Il faut donc qu'on ait $\frac{\text{fin } Z \text{ cof. } Z}{1+\text{fin. } Z^2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}$ à $\frac{\text{fin. } Z' \text{ cof } Z'}{1+\text{fin. } Z'^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)}$ en raiſon conſtante.

20. Or cela arrivera ſi on a $\frac{\text{ſin. } Z}{\sqrt{\left[1+\text{ſin } Z^2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\right]}}$ à $\frac{\text{ſin. } Z'}{\sqrt{\left[1+\text{ſin } Z'^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)\right]}}$ en raiſon conſtante, & $\frac{\text{cof. } Z}{\sqrt{\left[1+\text{ſin. } Z^2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\right]}}$ à $\frac{\text{cof } Z'}{\sqrt{\left[1+\text{ſin. } Z'^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)\right]}}$, en raiſon conſtante.

21. Pour trouver les conditions qui donnent ces rapports conſtans, je multiplie par une indéterminée conſtante k, les deux membres de l'équation $cc-\frac{bb}{1+\text{ſin. } Z^2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}=CC-\frac{BB}{1+\text{ſin. } Z'^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)}$, & j'y ajoute une autre indéterminée conſtante μ, & j'ai $\mu+kcc-kb^2+(\mu+kcc)$ ſin. $Z^2\times\frac{b^2-a^2}{a^2}$ diviſé par $1+$ſin. $Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)$ égal à $\mu+kCC-kBB+(\mu+kCC)$ ſin. $Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)$, diviſé par $1+$ſin. $Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)$.

22. Or, pour qu'il réſulte de cette équation que $\frac{\text{ſin. } Z}{\sqrt{\left[1+\text{ſin } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]}}$ eſt à $\frac{\text{ſin } Z'}{\sqrt{\left[1+\text{ſin } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]}}$ en raiſon conſtante, il faut qu'on ait $\mu+kcc=kbb=0$,

& $\mu + kCC - kBB = 0$, d'où l'on tire $-\frac{\mu}{k} = cc - bb = CC - BB$. Donc $CC - BB = cc - bb$; premiere condition.

23. Suppoſant maintenant d'autres indéterminées μ' & k', & mettant dans le numérateur des deux membres de l'équation précédente, $1 - \text{cof. } Z^2$ au lieu de $\text{fin. } Z^2$ & $1 - \text{cof. } Z'^2$ au lieu de $\text{fin. } Z'^2$, il eſt aiſé de voir qu'on aura de même $\frac{\text{cof. } Z}{\sqrt{\left[1 + \text{fin } Z^2\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right]}}$ en raiſon conſtante avec $\frac{\text{cof. } Z'}{\sqrt{\left[1 + \text{fin. } Z^2\left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)\right]}}$, ſi

$$\mu' + k'cc + (\mu' + k'cc)\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right) - k'b^2 = 0,$$ & ſi

$$\mu' + k'CC + (\mu' + k'CC)\left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right) - k'B^2 = 0,$$

c'eſt-à-dire, en réduiſant, ſi $\frac{(\mu' + k'cc)}{a^2} - k' = 0$, & ſi $\frac{\mu' + k'CC}{A^2} - k' = 0$, d'où l'on tire $-\frac{\mu'}{k'} = cc - a^2 = CC - A^2$.

24. Donc on a pour ſeconde condition $cc - a^2 = CC - A^2$.

25. Donc puiſqu'on a déja $cc - bb = CC - BB$, on aura encore $BB - AA = bb - aa$.

26. Donc, en ſuppoſant encore $k = 1$, & $k' = 1$, pour plus de ſimplicité, on aura $\mu = c^2 - b^2 = C^2 - B^2$,

& $\mu' = a^2 - c^2 = A^2 - C^2$, ainſi faiſant dans l'art. 21 & dans l'art. 23, $k = 1$ & $k' = 1$, on trouvera les mêmes conditions que ci-deſſus, & les quantités μ & μ' ſeront $cc - bb$ & $aa - cc$, ou $CC - BB$ & $AA - CC$.

27. On pourroit croire qu'il ſeroit poſſible de rendre les conditions $cc - bb = CC - BB$, & $cc - aa = CC - AA$ encore plus générales, en ne déduiſant pas de l'équation donnée les deux équations ſéparées $\frac{\text{ſin. } Z}{\sqrt{\left[1 + \text{ſin. } Z^2\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right]}}$ à $\frac{\text{ſin. } Z'}{\sqrt{\left[1 + \text{ſin. } Z'^2\left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)\right]}}$ en raiſon conſtante, & $\frac{\text{coſin. } Z}{\sqrt{\left[1 + \text{ſin. } Z^2\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right]}}$ à $\frac{\text{coſ. } Z'}{\sqrt{\left[1 + \text{ſin. } Z'^2\left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)\right]}}$ en raiſon conſtante, mais en déduiſant tout de ſuite & en une ſeule fois l'équation $\frac{\text{ſin. } Z \text{ coſ. } Z}{1 + \text{ſin. } Z^2\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)}$ à $\frac{\text{ſin. } Z' \text{ coſ. } Z}{1 + \text{ſin. } Z'^2\left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)}$ en raiſon conſtante.

28. Pour nous éclaircir là-deſſus, multiplions l'une par l'autre les deux équations affectées de μ & k, μ' & k', & les numérateurs ſeront (en repréſentant par ζ les angles Z & Z' indifféremment, & par x, ξ & α les quantités c & C, b & B, a & A indifféremment) $(\mu + kxx - k\xi\xi) \times (\mu' + k'xx - k'\xi\xi) + \text{ſin. } \zeta^2 \times \left[(\mu' + k'xx - k'\xi\xi) \times (\mu + kxx) \times \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right) + \right.$

$(\mu+kxx-k\zeta\zeta)(\mu'+k'xx)\left(\frac{c^2-a^2}{a^2}\right)]+$ fin. $\zeta^4\times$ $\left(\frac{c^2-a^2}{a^2}\right)^2\times(\mu+kxx)\times(\mu'+k'xx)$. Or, pour que ce numérateur ſoit en raiſon conſtante avec fin. ζ^2 cof. ζ^2, ou avec fin. ζ^2 — fin. ζ^4, il faut 1°. que $(\mu+kxx-k\zeta\zeta)\times(\mu'+k'xx-k'\zeta\zeta)=0$. D'où l'on tire d'abord $\mu+kxx-k\zeta\zeta=0$, & par conſéquent $xx-\zeta\zeta$ conſtant, c'eſt-à-dire, $CC-BB=cc-bb=0$, comme ci-deſſus. 2°. Que le coefficient de fin. ζ^2 ſoit à celui de fin. ζ^4 comme 1 eſt à -1, d'où l'on tire, en réduiſant & remarquant que $\mu+kxx-k\zeta\zeta=0$, $(\mu'+k'xx-k'\zeta\zeta)=-(\mu'+k'xx)\times\left(\frac{\zeta^2-c^2}{a^2}\right)$, ou $-k'a^2=-\mu-k'xx$, & $xx-aa$ conſtant, c'eſt-à-dire, $cc-aa=CC-AA$, comme ci-deſſus.

29. Nous avons ſuppoſé dans les calculs précédens, pour plus de ſimplicité (art. 18) $\delta=D$, ſi on ne vouloit pas s'aſtreindre à cette condition, on auroit les équations $\frac{cc}{\delta\delta}-\frac{bb}{\delta\delta\left[1+\text{fin. }Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]}=\frac{CC}{DD}-\frac{BB}{DD\left[1+\text{fin. }Z^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]}$, & il eſt aiſé de voir que dans les équations de condition ci-deſſus (art. 21 & 23), on aura $\frac{k}{\delta\delta}$ & $\frac{k'}{\delta'\delta'}$ au lieu de k & de k' (en déſignant par

Δ les quantités Δ & D indifféremment), d'où l'on tirera $\frac{cc-bb}{\Delta\Delta} = \frac{CC-BB}{DD}$, & $\frac{CC-AA}{DD} = \frac{cc-aa}{\Delta\Delta}$; donc $\frac{\Delta\Delta}{DD} = \frac{cc-aa}{CC-AA} = \frac{cc-bb}{CC-BB}$. Cette équation peut se déduire auſſi des art. 7 & 8, en faiſant $\frac{bb-cc}{\Delta\Delta}$ & $\frac{cc-aa}{\Delta\Delta}$ conſtant Mais les ſuppoſitions de $\Delta = D = C$ ſont les plus ſimples, parce qu'elles donnent le moyen de comparer l'attraction d'un ſphéroide quelconque à la diſtance Δ ou c, avec l'attraction à l'extrémité de l'axe $2C$ dans un autre ſphéroide, tel que $CC-AA = cc-aa$, & $cc-bb = CC-BB$.

30. On peut démontrer la propoſition de M. Maclaurin, d'une troiſiéme maniere encore plus ſimple que les deux précédentes. Pour cela, on conſidérera qu'il s'agit de prouver (pag. 235, Tom. VI, *Opuſc.*) que les ſecteurs elliptiques $\int cb'b'dZ$ & $\int CB'B'dZ$ ſont en raiſon conſtante, or, pour que ces ſecteurs elliptiques ſoient en raiſon conſtante, il faut que les ſecteurs circulaires correſpondans, ayant le même centre, le même axe & la même abſciſſe, ſoient auſſi en raiſon conſtante, c'eſt-à-dire que les ordonnées de ces ſecteurs ſoient comme les rayons; maintenant ſoient priſes ſur l'axe b, l'abſciſſe x & l'ordonnée y correſpondantes au demi-diametre b', c'eſt-à-dire, telles que $b'^2 = x^2 + y^2$, on faut que $yy = (bb - xx) \times \frac{aa}{bb}$,

$\frac{aa}{bb}$, d'où $x^2 = bb - \frac{yybb}{aa}$, & b'^2 ou $x^2 + y^2 = b^2 + y^2\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)$. Or la ſuppoſition de $c^2 - b'^2 = C^2 - B'^2$, de $C^2 - B^2 = c^2 - b^2$, & de $a^2 - b^2 = A^2 - B^2$, donne $b'^2 - a^2$ la même dans les deux ellipſes, donc $\frac{y^2}{a^2}$ & $\frac{y}{a}$ ſera auſſi la même dans les deux ellipſes; de plus, l'ordonnée correſpondante du cercle décrit du rayon b, ſera $\frac{yb}{a}$, donc les ordonnées des deux cercles ſeront comme $\frac{yb}{a}$ à $\frac{yB}{A}$, c'eſt-à-dire, comme b eſt à B. Donc, &c.

31. Les ſecteurs circulaires étant entr'eux comme b^2 à B^2, & les ſecteurs elliptiques correſpondans étant aux ſecteurs circulaires comme a eſt à b, il s'enſuit que les ſecteurs elliptiques $\int b'b'dZ$ & $\int B'B'dZ'$ ſeront entr'eux comme ba à BA, donc les attractions totales ſeront comme cba à CBA.

32. Il eſt aiſé, par la théorie précédente, de montrer que la quantité $\frac{d\zeta}{cc - bb + bb\zeta\zeta\left(\frac{cc}{aa} - 1\right)}$ (page 241, Tom. VI, *Opuſc.*) eſt en raiſon conſtante avec la quantité correſpondante dans l'autre ſphéroïde. En effet, la queſtion ſe réduit à prouver (à cauſe de $cc - bb$ conſtant, & de $cc - aa$ conſtant), que $\frac{bb\zeta\zeta}{aa}$

eſt le même dans les deux ſphéroïdes, c'eſt-à-dire, que ζ eſt comme $\frac{a}{b}$; or, c'eſt ce qui eſt clair par la démonſtration précédente, car puiſque les angles des deux ſecteurs circulaires ſont les mêmes, & que les tangentes ζ des ſecteurs elliptiques correſpondans ſont aux tangentes (égales) des ſecteurs circulaires (art. 30 & 31) comme a eſt à b; il s'enſuit que ζ eſt comme $\frac{a}{b}$.

33. Il faut encore remarquer, à la fin de la page 142, que l'équation $\frac{CC}{B'B'} = \frac{\delta\delta}{\delta\delta - c_{,}\delta + b'b'}$ n'a lieu dans la ſuppoſition préſente, qu'en faiſant $\delta = c$, parce que $CC - B'B'$ eſt ſuppoſé ici $= cc - b'b'$, & qu'ainſi il ne ſe trouve point dans cette équation $CC - B'B' = cc - b'b'$, de quantité δ qui ſoit différente de C.

34. J'obſerverai en finiſſant ces recherches, qu'à la page 138 des Mém. de Berlin, 1773, il s'eſt gliſſé une faute d'impreſſion qui pourroit faire croire que les formules de M. de la Grange ne s'accordent pas avec les nôtres, au lieu de $\frac{1-m}{m} = \mu$, il faut lire $\frac{1-m}{m} = \mu^2$, de ſorte que μ eſt une quantité radicale au lieu d'une quantité rationnelle qu'il ſembleroit être, ſi on s'en tenoit à l'expreſſion $\frac{1-m}{m} = \mu$; par ce moyen les quantités que M. de la Grange appelle Q & Q'

dans la page ſuivante, & que j'avois d'abord crues plus ſimples que les quantités analogues dans mes calcula, ſont préciſément du même genre, en ſorte que l'intégration reſte également difficile.

35. On peut obſerver auſſi que dans les formules de M. de la Grange, il faut, pour avoir l'attraction dans le plan de l'équateur, ſuppoſer dans ces formules $m = 1$ ou $n = 1$, l'autre coefficient n ou m étant d'ailleurs ce qu'on voudra, & les réſultats ſeront les mêmes que ceux de la page 183 du Tom. VI de nos *Opuſcules*, réſultats qui ne donnent point la valeur de cette attraction. Ainſi, il paroît néceſſaire d'employer ici quelque moyen analogue à la méthode de M. Maclaurin, pour trouver l'attraction dans l'équateur.

36. Pour cet effet, ſoit dans la méthode de M. de la Grange, c l'axe parallèle aux z, b l'axe parallèle aux x, a l'axe parallèle aux y, on aura $z^2 + \frac{c^2x^2}{b^2} + \frac{c^2y^2}{a^2} = c^2$; ſoit enſuite ſuppoſé $c - z = z'$ pour faire commencer les z' a l'extrêmité de l'axe $2c$ où l'on ſuppoſe que ſe fait l'attraction, on aura $-2cz' + z'z' + \frac{c^2x^2}{b^2} + \frac{c^2y^2}{a^2} = 0$; & ſi $c = b$, on aura $x^2 + z'z' - 2cz' + \frac{c^2y^2}{a^2} = 0$. Soit fait enſuite, conformément à la méthode de M. de la Grange, $y = r$ ſin. p, $x = r$ cof. p ſin. q, $z' = r$ cof. p cof. q, en imaginant que

les r ſoient projettés, non ſur le plan de a & de b, comme dans ſa ſolution, mais ſur celui de c & de b, on aura r^2 cof. $p^2 - 2cr$ cof. p cof. $q + r^2$ ſin. $p^2 \times \frac{c^2}{a^2} = 0$; d'ou $r = \frac{2c \text{ cof. } p \text{ cof. } q}{\text{cof. } p^2 + \text{ſin. } p^2 \times \frac{c^2}{a^2}}$, où l'on voit que la valeur de r ne contient point de q au dénominateur, & comme l'élément de l'attraction parallèlement aux z', eſt ici $r\,dp\,dq \times$ cof p cof q, ainſi qu'il eſt aiſé de le voir, on trouvera très-facilement par ce moyen l'attraction d'un ſphéroide dans le plan de l'équateur, en employant la méthode de M. de la Grange, mais en changeant l'origine des coordonnées & le plan de projection. J'avois déja fait cette remarque (Mém. de Berlin, 1774, pag. 311), dans une lettre écrite à M. de la Grange, le 15 Décembre 1775.

§. II.

Comparaiſon des deux formules des pages 181 & 184 du Tome VI de nos Opuſcules.

1. J'ai fait différens eſſais pour parvenir à déterminer l'attraction d'un ſphéroide elliptique, qui n'eſt pas un ſolide de révolution, & quoique ces eſſais n'ayent pas abouti à des réſultats beaucoup plus ſimples que ceux du Tome VI de mes *Opuſcules*, je crois devoir les expoſer ici, parce qu'ils fourniront peut-être à

d'autres Géométres des vues dont ils ſauront mieux tirer parti que moi.

2. J'ai donné dans le Tome VI de mes *Opuſcules*, deux formules différentes pour l'attraction de ces ſphéroïdes, l'une, pag. 181, art. 109, l'autre, pag. 183, art. 114, & ces deux formules ſont à-peu-près également ſimples. Voici de nouvelles remarques ſur l'une & l'autre de ces formules, pour juger des cas où l'une doit être employée préférablement à l'autre. Je commence par celle de la page 181. Je ſuppoſe toujours qu'on ait le Tome VI de mes *Opuſcules* ſous les yeux; & je remarque d'abord qu'au lieu de $\alpha(1-r'r')^{\frac{1}{2}}$ au dénominateur, il faut $\alpha^2(1-r'r')^{\frac{1}{2}}$, α ayant été mis pour α^2 par une faute d'impreſſion légere, mais comme α^2 eſt toujours réel, ſoit poſitif, ſoit négatif, je négligerai ici cette quantité conſtante α^2 pour rendre les calculs un peu plus faciles; en ſorte que la différentielle à intégrer ſera ſimplement $\frac{-d.}{(1-r'r')^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\sqrt{(r^2-c^2)}}{\sqrt{(c^2\alpha^2+c^2-r^2)}} AT.\left(\frac{\sqrt{(1-r'r')}}{r}\right)$.

3. Cela poſé, ſoient les trois axes c, a, b, inégaux entr'eux, nous faiſons cette ſuppoſition, parce que dans le cas où deux des axes ſont égaux, les calculs de MM. Maclaurin & Clairaut, donnent l'attraction par des arcs de cercle ou des logarithmes, & qu'ainſi ce cas ne peut ici exiger aucune recherche particuliere.

4. Dans cette ſuppoſition de l'inégalité des trois axes, il peut arriver deux cas, ou $\sqrt{(1-r'r')}$ eſt réel, ou il eſt imaginaire, dans ce dernier cas, la formule doit être changée en une autre, comme on le verra plus bas.

5. Arrêtons-nous d'abord au cas de $\sqrt{(1-r'r')}$ réel, ce qui donne $r'^2 < 1$, & obſervons que r'^2 eſt toujours une quantité réelle & poſitive, puiſque $r'^2 = \mathfrak{C}^2(1 + \alpha^2 \text{cof. } \zeta^2) = \mathfrak{C}^2\left[1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\text{cof. } \zeta^2\right] = \mathfrak{C}^2\left(\text{ſin. } \zeta^2 + \frac{b^2}{a^2}\text{ cof. } \zeta^2\right)$, & qu'ainſi r' ne peut jamais être imaginaire dans la fraction $\frac{\sqrt{(1-r'r')}}{r'}$, mais ſeulement $\sqrt{(1-r'r')}$.

6. J'obſerve d'abord que r'^2 peut-être < 1 dans toute l'étendue du ſphéroide, c'eſt-à-dire, depuis $\zeta = 0$, juſqu'à $\zeta = 90°$ (art. 107 du Vol. cité, pag. 179), ou que r'^2 peut être < 1 dans une portion du ſphéroide, & plus grand dans l'autre.

7. Pour que r'^2 ſoit < 1 dans toute l'étendue du ſphéroide, il faut conſidérer, 1°. que $r'^2 = \mathfrak{C}^2(1 + \alpha^2 \text{cof. } \zeta^2)$; 2°. que ſi α^2 eſt poſitif, c'eſt-à-dire, ſi $\frac{b^2}{c^2} - 1$ eſt poſitif, ce qui donne $b > c$, la plus grande valeur de r'^2 eſt $\mathfrak{C}^2 + \alpha^2\mathfrak{C}^2$, en obſervant que $\mathfrak{C}^2 = \frac{a^2}{b^2}$ eſt toujours poſitif; or $\mathfrak{C}^2 + \alpha^2\mathfrak{C}^2 = (\alpha^2 + 1)\mathfrak{C}^2 = \frac{b^2}{c^2} \times \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{c^2}$; donc pour que r'^2 ſoit < 1 dans toute l'étendue du ſphéroide, $\frac{a^2}{c^2}$ doit être < 1, ou tout au plus $= 1$;

& comme on ſuppoſe tous les axes inégaux, on aura $\frac{a^2}{c^2} < 1$, ou $a < c$.

8. Donc, reſtant toujours dans cette ſuppoſition de a^2 poſitif, & faiſant les trois axes inégaux, il faut pour que r'^2 ſoit < 1 dans toute l'étendue du ſphéroide, que $b > c > a$.

9. Maintenant, dans le cas où $r'^2 < 1$, & où a^2 eſt poſitif, qui eſt celui dont il s'agit ici, il eſt évident que coſ. χ^2 étant $= \frac{r'^2 - c^2}{c^2 a^2}$, $r'^2 - C^2$ eſt néceſſairement poſitif, & qu'ainſi le radical $\sqrt{(r'^2 - C^2)}$ eſt réel, auſſi-bien que le radical $\sqrt{(C^2 a^2 + C^2 - r'^2)}$, puiſque $\chi^2 = \frac{c^2 a^2 + c^2 - r'^2}{c^2 a^2}$.

10. Il n'y aura donc en ce cas aucun changement à faire à la formule de la page 181 du Tom. VI de nos *Opuſcules* (article 111), qui eſt (en ſuppoſant $\frac{r'}{\sqrt{(1 - r'^2 r'^2)}} = \mu$), $\frac{d\mu \sqrt{[\mu^2 (1 - C^2) - C^2]}}{\sqrt{[(C^2 a^2 + C^2 - 1)\mu^2 + C^2 a^2 + C^2]}} \times AT \frac{1}{\mu}$, quantité dans laquelle C^2 & $C^2 a^2 + C^2$ ſont évidemment poſitifs, puiſque $C^2 = \frac{a^2}{b^2}$, & $C^2 a^2 + C^2 = \frac{a^2}{c^2}$, & dans laquelle $C^2 a^2 + C^2 - 1$ eſt $\frac{a^2}{c^2} - 1$, c'eſt-à-dire, négatif. Il eſt viſible de plus que $1 - C^2$ eſt poſitif pour deux raiſons; 1°. parce que $1 - C^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$, & que a (*hyp.*) eſt $< b$; 2°. parce que ſi $1 - C^2$ étoit négatif, le radical ſupérieur ſeroit imaginaire, le radical

inférieur étant réel, ce qu'on ne ſauroit ſuppoſer.

11. Donc la différentielle ſe réduit à la forme $\frac{d\mu\sqrt{(g\mu\mu-f)}}{\sqrt{(h-k\mu\mu)}} \times AT\frac{1}{\mu}$.

12. Donc (LIIIe Mém. §. III, art. 22) la quantité différentielle qui multiplie ici $AT\frac{1}{\mu}$ ne peut ſe réduire ni à un ſimple arc d'ellipſe, ni à un ſimple arc d'hyperbole, comme nous l'avons déja prouvé d'une autre maniere dans le Tome VI de nos *Opuſcules*, pag. 203 & 204, mais elle ſe réduit, par ce même art. 22, à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

13. Pour mettre cette quantité ſous la forme la plus ſimple, je fais p = à l'angle dont la tangente eſt $\frac{1}{\mu}$, & j'ai $\frac{\text{ſin. } p}{\text{cof. } p} = \frac{1}{\mu}$, $\mu = \frac{\text{cof. } p}{\text{ſin. } p}$, $d\mu = -\frac{dp}{\text{ſin. } p^2}$, de ſorte que la différentielle propoſée ſe réduit à $-\frac{p\,dp}{\text{ſin. } p^2} \times \frac{\sqrt{(\text{cof. } p^2 - c^2)}}{\sqrt{(c^2 a^2 + c^2 - \text{cof. } p^2)}}$, ou $-\frac{p\,dp}{\text{ſin. } p^2} \times \frac{\sqrt{\left(\text{cof. } p^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2} - \text{cof. } p^2\right)}}$, quantité qu'on peut encore ſimplifier en mettant pour ſin. p^2 & cof. p^2 leurs valeurs $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cof. $2p$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ cof. $2p$, & en faiſant $2p = u$, ce qui réduira la différentielle à une quantité de cette forme $\frac{E u\,du\sqrt{(A+\text{cof. } u)}}{(1-\text{cof. } u)\sqrt{(B-\text{cof. } u)}}$, mais l'intégration reſte toujours également difficile, & dépendante des ſections coniques, excepté

excepté dans le cas où $B=1$, c'eſt-à-dire, où deux des axes ſont égaux; cas dont il n'eſt point queſtion ici.

14. On peut remarquer encore que comme $\frac{1}{p}$, ou $\frac{\text{ſin. } p}{\text{cof. } p}=\frac{\sqrt{(1-r'^2)}}{r'}$, on a cof. $p=r'$ & ſin. $p=\sqrt{(1-r'^2)}$; ainſi les deux limites de cof. p ſont les mêmes que celles de r', ſavoir (art. 7), cof. $p=\mathfrak{C}^2=\frac{a^2}{c^2}$ lorſque $\zeta=90°$, ou cof. $\zeta=0$, & cof. $p=\mathfrak{C}^2+\frac{1}{a^2}\mathfrak{C}^2=\frac{a^2}{c^2}$ lorſque $\zeta=0$, ou cof. $\zeta=1$.

15. Enfin, puiſque p eſt l'angle dont la tangente eſt $\sqrt{(n-1)}$ (n étant $=\frac{1}{r'}$ & $n>1$) & par conſéquent dont la ſécante eſt n, & que cette ſécante $n=\frac{CV}{CR}$ (Fig. 13), il s'enſuit que cette ſécante eſt $=$ au demi-diametre CV en prenant $CR=a$ pour ſinus total.

16. Suppoſons préſentement α^2 négatif, c'eſt-à-dire, $b<c$, les trois axes étant toujours ſuppoſés inégaux, & r'^2 étant toujours ſuppoſé <1; on fera $\alpha^2=-\alpha'^2$, α'^2 étant poſitif, & on aura $r'^2=\mathfrak{C}^2-\mathfrak{C}^2\alpha'^2$ cof. ζ^2, cof. $\zeta^2=\frac{\mathfrak{C}^2-r'^2}{\mathfrak{C}^2\alpha'^2}$, ſin. $\zeta^2=\frac{\mathfrak{C}^2\alpha'^2-\mathfrak{C}^2+r'^2}{\mathfrak{C}^2\alpha'^2}$; donc r'^2 ſera $<\mathfrak{C}^2$, & la différentielle de l'art. 109, pag. 180, Tom. VI, *Opuſc.* deviendra $\frac{dr'}{a^2(1-r'r')^{\frac{1}{2}}}\times\frac{\sqrt{(\mathfrak{C}^2-r'^2)}}{\sqrt{(\mathfrak{C}^2\alpha'^2-\mathfrak{C}^2+r'^2)}}\times AT.\left(\frac{\sqrt{(1-r'r')}}{r'}\right)$.

17. Par conſéquent la différentielle à intégrer ſera

(en faiſant toujours $\mu = \frac{\nu'}{\sqrt{(1-\nu'^2)}}$)

$$\frac{d\mu\sqrt{(\zeta^2+(\zeta^2-1)\alpha^2}}{\sqrt{[(\zeta^2\alpha'^2-\zeta^2+1)\mu^2+\zeta^2\alpha'^2-\zeta^2]}}.$$

18. Dans ce cas ν'^2 ſera $<\zeta^2$, puiſque $\nu'^2 = \zeta^2 - \alpha'^2\zeta^2$ cof. ξ^2, & les deux limites de la valeur de $\nu'^2 = \zeta^2 - \zeta^2\alpha'^2$ cof ξ^2 ſeront $\zeta^2 = \frac{a^2}{b^2}$, & $\zeta^2 - \alpha'^2\zeta^2 = \frac{a^2}{c^2}$; donc pour que ν'^2 ſoit <1 dans toute l'étendue du ſphéroide, il faudra que a^2 ſoit $<b^2$, c'eſt-à-dire, à cauſe de $b^2<c^2$ (*hyp.*) qu'on aura $a<b<c$.

19. De plus, il eſt clair que dans ce cas $\zeta^2\alpha'^2 - \zeta^2 = -\zeta^2\alpha^2 - \zeta^2 = -\frac{a^2}{c^2}$, & par conſéquent négatif; que $\zeta^2 - 1$, ou $\frac{a^2}{b^2} - 1$ eſt auſſi négatif, & que $\zeta^2\alpha'^2 - \zeta^2 + 1$, ou $-\frac{a^2}{c^2} + 1$ eſt poſitif.

20. Donc la différentielle qui multiplie $AT\frac{Y}{\mu}$, ſe réduira à la forme $\frac{d\mu\sqrt{(f-g\mu\mu)}}{\sqrt{(k\mu\mu-h)}}$, qui dépend (LIIIe Mém. §. III, art. 23,) d'un arc d'ellipſe & d'un arc d'hyperbole.

21. En faiſant (comme dans l'art. 13) $\mu = \frac{\text{cof. } p}{\text{ſin. } p}$, la formule différentielle du cas préſent ſe changera en $\frac{p\,dp}{\text{ſin. } p^2} \times \frac{\nu\,(\zeta^2 - \text{cof. } p^2)}{\sqrt{\left(\text{cof. } p^2 - \frac{a^2}{c^2}\right.}}$, ſur laquelle on peut

faire les mêmes remarques & réductions que dans la formule analogue du cas précédent.

22. Venons maintenant au cas de $r'^2 > 1$, ce qui donne $\sqrt{(1-r'^2)} = \sqrt{(r'^2-1)}.\sqrt{-1}$, & remarquons d'abord que l'angle dont la tangente eſt k, eſt $\frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \log.\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1-k\sqrt{-1}}\right)$, k étant tout ce qu'on voudra ; d'où il s'enſuit que l'angle dont la tangente eſt $k\sqrt{-1}$ ſera $\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log.\left(\frac{1-k}{1+k}\right)$; & qu'ainſi l'angle dont la tangente eſt $\frac{\sqrt{(r'^2-1)}}{r'} \times \sqrt{-1}$, ſe trouvant multiplié, dans la différentielle à intégrer, par $\frac{1}{\sqrt{(1-r'^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{(r'^2-1)}\sqrt{-1}} = \frac{1}{k\sqrt{-1}}$, le tout ſe réduira à une quantité réelle, & les imaginaires diſparoîtront.

23. Faiſant donc ici $\mu = \mu'\sqrt{-1}$, & prenant μ' pour une quantité réelle, on aura $d\mu.dT\frac{1}{r'} = d\mu'\sqrt{-1} \times \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\log.\left(1+\frac{\sqrt{-1}}{\mu'\sqrt{-1}}\right) - \log.\left(1-\frac{\sqrt{-1}}{\mu'\sqrt{-1}}\right)\right.$ $\left. = \frac{d\mu'}{2} \log.\left(\frac{1+\frac{1}{\mu'}}{1-\frac{1}{\mu'}}\right)\right]$, ou $\frac{d\mu'}{2} \log.\left(\frac{1+\mu'}{\mu'-1}\right)$; quantité toute réelle.

24. On peut remarquer que $\frac{1}{\mu'\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{(1-r'^2)}}{r'}$,

& par conſéquent $\frac{1}{\mu'} = -\frac{\sqrt{(i'i'-1)}}{i'}$; ainſi

$$\log.\left(1+\frac{1}{\mu'}\right)-\log.\left(1-\frac{1}{\mu'}\right)=\log.\left(\frac{i'-\sqrt{(i'i'-1)}}{i'+\sqrt{(i'i'-1)}}\right)$$
$$=\log.\left[i'-\sqrt{(i'i'-1)}\right]^2=2\log.\left[i'-\sqrt{(i'i'-1)}\right].$$

Or $\log. i'-\sqrt{(i'i'-1)}$ eſt l'intégrale de $\int\frac{-di'}{\sqrt{(i'i'-1)}}$, qui dépend d'un ſecteur hyperbolique dont 1 eſt le demi-axe, & i' l'abſciſſe.

25. Nous ſuppoſons d'abord ici $i'^2>\mathfrak{C}^2$, & cette ſuppoſition peut très-bien ſubſiſter avec celle de $i'^2>1$, il ſuffit pour cela, 1°. que α^2 ſoit poſitif, c'eſt-à-dire, $b>c$, puiſque, cof. $\chi^2=\frac{i'^2-\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2\alpha^2}$ étant toujours poſitif, il faut que $i'^2>\mathfrak{C}^2$. 2°. Que la plus petite valeur de i'^2, c'eſt-à-dire, $\mathfrak{C}^2$, ou $\frac{a^2}{b^2}$, ſoit >1, c'eſt-à-dire, $a>b$. Donc on a ici $a>b>c$.

26. Nous aurons donc ici i'^2, ou $\frac{\mu^4}{1+\mu^2}=\frac{-\mu'^2}{1-\mu'^2}$, ou afin de rendre tout poſitif $i'^2=\frac{\mu'^2}{\mu'^2-1}$, d'où la différentielle qu'il s'agit ici d'examiner, abſtraction faite de $AT\frac{1}{\mu}$, ſera $\frac{d\mu' V[\mu'^2(1-\mathfrak{C}^2)+\mathfrak{C}^2]}{V[(\mathfrak{C}^2\alpha^2+\mathfrak{C}^2-1)\mu'^4-\mathfrak{C}^2\alpha^2-\mathfrak{C}^2]}$.

27. Or on a ici, 1°. $a^2>b^2$, d'où $\frac{a^2}{b^2}$, ou $\mathfrak{C}^2>1$; 2°. $\mathfrak{C}^2\alpha^2+\mathfrak{C}^2-1=\frac{a^2}{c^2}-1$, & par conſéquent poſitif, puiſque $a>c$.

28. Donc la différentielle ſera de la forme $\frac{d\mu' \sqrt{(f-g\mu'^2)}}{\sqrt{(k\mu'^2-h)}}$, qui dépend, comme dans l'art. 19, d'un arc d'ellipſe & d'un arc d'hyperbole.

29. Si ν'^2 eſt $< \mathfrak{C}^2$, alors α^2 ſera négatif, & réciproquement; donc $\alpha^2 = -\alpha'^2$, & on aura dans la différentielle de la page 180, Tom. VI, *Opuſc.* la quantité $\frac{\sqrt{(\mathfrak{C}^2-\nu'^2)}}{\sqrt{(\mathfrak{C}^2\alpha'^2-\mathfrak{C}^2+\nu'^2)}}$; ainſi mettant pour ν'^2 ſa valeur $\frac{\mu'^2}{\mu'^2-1}$, la différentielle qu'il s'agit d'examiner ici ſera $\frac{d\mu' \sqrt{[\mu'^2(\mathfrak{C}^2-1)-\mathfrak{C}^2]}}{\sqrt{[(\mathfrak{C}^2\alpha'^2-\mathfrak{C}^2+1)\mu'^2+\mathfrak{C}^2-\mathfrak{C}^2\alpha'^2]}}$.

30. Or, ν'^2 étant ſuppoſé > 1, la plus petite valeur de ν'^2 qui eſt ici $\mathfrak{C}^2-\mathfrak{C}^2\alpha'^2 = \frac{a^2}{c^2}$, eſt > 1. Donc $a > c$. De plus, α^2 négatif donne $b < c$; donc $a > c > b$; donc $\mathfrak{C}^2$, ou $\frac{a^2}{b^2} > 1$; donc auſſi $\mathfrak{C}^2\alpha'^2-\mathfrak{C}^2+1$, ou $1-\frac{a^2}{c^2}$ eſt négatif; donc la différentielle ſera de la forme $\frac{d\mu' \sqrt{(g\mu'^2-f)}}{\sqrt{(h-k\mu'^2)}}$, qui dépend, comme dans l'art. 11 ci-deſſus, d'un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

31. Venons préſentement au cas où ν'^2 eſt alternativement $<$ & > 1. Suppoſons d'abord α^2 poſitif, c'eſt-à-dire, $b > c$, ce qui donne (art. 9) $\nu'^2 > \mathfrak{C}^2$, il eſt clair que $\mathfrak{C}^2+\alpha^2\mathfrak{C}^2$, ou $\frac{a^2}{c^2}$, qui eſt la plus grande

valeur de v' ſera >1, & ζ^2, qui eſt ſa plus petite valeur, ſera <1. Donc $\frac{a^2}{c^2}>1$, & $\frac{a^2}{b^2}<1$, donc $a>c$, $b>a$, & $b>c$, ce qui donne $b>a>c$.

32. Donc la différentielle dont il s'agit ici ſera, dans le cas où v' eſt <1, de la même forme que celle de la pag. 181, Tom. VI, *Opuſc.* & par conſéquent à cauſe de $1-\zeta^2$ poſitif, & de $\zeta^2 a^2+\zeta^2-1$, ou $\frac{a^2}{c^2}-1$ poſitif, ſera de la forme $\frac{d\mu\sqrt{(g\mu\mu-f)}}{\sqrt{(h+k\mu\mu)}}$, qui dépend (§. III du LIIIe Mém. art. 23) d'un arc d'ellipſe & d'un arc d'hyperbole.

33. Et dans le cas de $v'>1$, la différentielle aura, comme dans l'art. 26 ci-deſſus la forme $\frac{d\mu'\sqrt{[(\mu'^2(1-c^2)+c^2]}}{\sqrt{[(c^2a^2+c^2-1)\mu'^2-c^2a^2-c^2]}}$, qui ſe réduit à la forme $\frac{d\mu'\sqrt{(f-g\mu'^2)}}{\sqrt{(k\mu'^2-h)}}$, laquelle dépend encore d'un arc d'ellipſe & d'un arc d'hyperbole.

34. Suppoſons maintenant a^2 négatif & $=-a'^2$, ce qui donne $b^2<c^2$, v'^2 étant alternativement <1 & >1. Il eſt clair, 1°. que v'^2 ſera $<\zeta^2$, à cauſe de cof. $\gamma^2=\frac{v'^2-c^2}{c^2a^2}=\frac{c^2-v'^2}{c^2a'^2}$. 2°. Que la plus petite valeur de v'^2, ſavoir $\zeta^2-a'^2\zeta^2$ ou $\frac{a^2}{c^2}$ ſera <1, & ſa plus grande valeur ζ^2 ou $\frac{a^2}{b^2}$ ſera ≥ 1. Donc $a>b$, $c\geq a$, & $b\leq c$, ou $c\geq a\geq b$.

35. Donc la différentielle dont il s'agit ici, ſera (art. 17) dans le cas de $s' < 1$, de la forme $\frac{d\mu\sqrt{[c^2+(c^2-1)\mu^2]}}{\sqrt{[(c^2a^2-c^2+1)\mu^2+c^2a^2-c^2]}}$, ou $\frac{d\mu\sqrt{(f+g\mu^2)}}{\sqrt{(k\mu^2-h)}}$, qui ſe réduit (LIIIe Mém. §. III, art. 23) à un arc d'ellipſe & à un arc d'hyperbole.

36. Et dans le cas de $s' > 1$, la différentielle aura (art. 29) la forme $\frac{d\mu'\sqrt{[\mu'^2(c^2-1)-c^2]}}{\sqrt{[(c^2a^2-c^2+1)\mu'^2+c^2-c^2a^2]}}$, ou $\frac{d\mu'\sqrt{(g\mu'^2-f)}}{\sqrt{(k\mu'^2+h)}}$, qui ſe réduit encore à un arc d'ellipſe & un arc d'hyperbole.

37. Nous avons donné dans les articles précédens les conditions de rapport entre c, b, a, qui donnent s'^2 toujours plus petit ou toujours plus grand que l'unité, ou ſucceſſivement plus petit ou plus grand que l'unité, a^2 étant ſuppoſé poſitif ou négatif, c'eſt-à-dire, $b >$ ou $< c$. On peut trouver ces mêmes conditions par une autre méthode fort ſimple.

38. Pour cela, on conſidérera que $s' = \frac{1}{s}$, & que (art. 15) $s = \frac{CV}{CR}$ (Fig. 13); donc pour que s' ſoit toujours $<$ ou toujours > 1, ou ſucceſſivement $>$ & < 1, il faut que s ou CV ſoit toujours $>$ ou $< CR$, ou ſucceſſivement $>$ ou $< CR$.

39. Or CV eſt moyenne entre CK & CA. Donc, 1°. ſuppoſant a^2 poſitif, ou $CK > CA$, il faut que

$\frac{CV}{CR}$, ou $\frac{CV}{a}$ ſoit toujours > 1. Donc CA ou c doit être $> a$, puiſque CA eſt ici la plus petite valeur de CV. Donc $b > c > a$.

2°. Par la même raiſon, pour que $\frac{CV}{a}$ ſoit toujours $\leqslant 1$, il faut que ſa plus grande valeur $\frac{b}{a}$ ſoit < 1; c'eſt-à-dire, que b ſoit toujours $< a$; donc $a > b > c$.

3°. Enfin, pour que $\frac{CV}{a}$ ſoit alternativement $>$ & $\leqslant 1$, il faut que la plus grande valeur de $\frac{CV}{a}$, c'eſt-à-dire, $\frac{b}{a}$ ſoit > 1, & ſa plus petite valeur $\frac{c}{a} < 1$. Donc $b > a > c$.

4o. Suppoſons maintenant a^2 négatif, c'eſt-à-dire, $b < c$, il faut,

1°. Pour que $\frac{CV}{a}$ ſoit toujours > 1, que la plus petite valeur de $\frac{CV}{a}$, c'eſt-à-dire, $\frac{b}{a}$, ſoit > 1. Donc $c > b > a$.

2°. Pour que $\frac{CV}{a}$ ſoit toujours < 1, il faut que la plus grande valeur de $\frac{CV}{a}$, c'eſt-à-dire, $\frac{c}{a}$ ſoit < 1. Donc $a > c > b$.

3°. Enfin, pour que $\frac{CV}{a}$ ſoit alternativement $>$ & $\leqslant 1$,

$\leqq 1$, il faut que ſa plus petite valeur $\frac{b}{a}$ ſoit < 1, & ſa plus grande valeur $\frac{c}{a} > 1$. Donc $c > a > b$.

41. On voit donc, 1°. que s'^2 ſera toujours < 1 dans les deux cas ſuivans.

I. $b > c > a$,
II. $c > b > a$;

ce qui s'accorde avec les art. 8 & 18.

2°. Que s'^2 ſera toujours > 1 dans les deux cas ſuivans :

III. $a > b > c$,
IV. $a > c > b$;

ce qui s'accorde avec les art. 25 & 30.

3°. Enfin, que s'^2 ſera ſucceſſivement < 1 & > 1 dans les deux cas ſuivans :

V. $b > a > c$,
VI. $c > a > b$;

ce qui s'accorde avec les art. 31 & 34.

42. Ces ſix conditions, que j'ai marquées par les chiffres romains I, II, &c. expriment évidemment tous les cas poſſibles d'inégalité entre les demi-axes c, b, a.

43. Dans le cas où s'^2 eſt toujours < 1, la quantité $AT\frac{1}{\mu}$ dépend uniquement des arcs de cercle ; dans le cas où s'^2 eſt > 1, elle dépend uniquement des logarithmes, enfin, dans le cas où s'^2 eſt d'abord < 1 ;

& enſuite plus grand ou réciproquement, elle dépend d'abord des arcs de cercle, & enſuite des logarithmes, ou réciproquement.

44. Or, dans le cas où s'^2 eſt ſucceſſivement $<$ & >1, ou ſucceſſivement $>$ & <1, on a $s^2 = \frac{1}{s'^2}$ ſucceſſivement $>$ & <1, ou ſucceſſivement $<$ & >1, c'eſt-à-dire, $b>a>c$ & $b<a<c$, ou $c>b>a$; ou $b<a<c$ & $b>a>c$.

45. Donc dans le Ve des cas précédens (art. 41), la quantité $AT\frac{1}{\mu}$ eſt d'abord circulaire, puis logarithmique; & dans le VIe, elle eſt d'abord logarithmique, puis circulaire.

46. Je déſignerai par (C) le cas où $AT\frac{1}{\mu}$ eſt toujours circulaire, par (L) le cas où elle eſt toujours logarithmique, & par (CL) le cas où elle eſt d'abord circulaire, & enſuite logarithmique, & par (LC) le cas où elle eſt d'abord logarithmique, enſuite circulaire.

47. Donc en ſuppoſant, comme nous le faiſons ici, que les coupes elliptiques faites par l'extrémité de l'axe $2c$ ſoient perpendiculaires au plan de c & de b, nous aurons (art. 41, 43, 44 & 45) les ſix combinaiſons ſuivantes :

I. $b>c>a$ (C)
II. $c>b>a$ (C)
III. $a>b>c$ (L)

IV. $a > c > b$ (L)

V. $b > a > c$ (CL)

VI. $c > a > b$ (LC)

48. Nous avons ſuppoſé que les coupes elliptiques étoient perpendiculaires au plan de l'ellipſe qui a pour demi-axes c & b. Si elles l'étoient au plan de l'ellipſe qui a pour demi-axe c & a, alors nommant ζ' un des demi-diametres de cette ellipſe à volonté, il eſt clair que les rapports des axes des ellipſes qui forment les coupes, ſeront celui de ζ' à b, d'où il s'enſuit que pour avoir les conditions où r'^2 ſera toujours < 1, ou toujours > 1, ou ſucceſſivement $< \&> 1$, il faudra mettre dans les conditions de l'article précédent, a pour b, & b pour a. Donc,

1°. r'^2 ſera toujours < 1 ſi

$a > c > b$ IV. (C)

ou $c > a > b$ VI. (C)

2°. r'^2 ſera toujours > 1 ſi

$b > a > c$ V. (L)

ou $b > c > a$ I. (L)

3°. Enfin, r'^2 ſera ſucceſſivement $< \&> 1$, ſi l'on a

$a > b > c$ III. (CL)

ou $c > b > a$ II. (LC)

49. D'où l'on voit que ſi r'^2 eſt ſucceſſivement $> \&$ < 1, ou $< \&> 1$, en coupant le ſolide elliptique par un plan perpendiculaire à celui des c & des b, on pourra avoir r'^2 toujours $<$ ou > 1, en coupant le

même ſolide par un plan perpendiculaire à celui des c & des a, & réciproquement, puiſque dans le premier cas on aura la Ve & la VIe condition, qui, dans le ſecond cas, donnent s'^2 toujours > 1 ou toujours < 1.

50. Donc dans la formule néceſſaire pour trouver l'attraction du ſphéroïde à l'extrémité de l'axe c, on pourra toujours ſuppoſer $s'^2 <$ ou > 1, puiſqu'il ſuffira pour cela de couper le ſphéroïde par des plans elliptiques paſſant par l'extrémité de l'axe c, & perpendiculaires, ſoit au plan de c & de b, ſoit a celui de c & de a.

51. Donc en coupant le ſphéroïde d'abord par un plan perpendiculaire à celui des c & des b (ce que j'appellerai la *premiere methode*), enſuite par un plan perpendiculaire à celui des c & des a (ce que j'appelle la *ſeconde méthode*), & combinant enſemble les art. 41 & 48, on aura les cas ſuivans :

I. $b > c > a$ (C) (L)
II. $c > b > a$ (C) (LC)
III. $a > b > c$ (L) (CL)
IV. $a > c > b$ (L) (C)
V. $b > a > c$ (CL) (L)
VI. $c > a > b$ (LC) (C)

Ce qui ſignifie que dans le cas de $b > c > a$, on aura, par la premiere méthode, $AT\frac{1}{\rho}$ toujours circulaire, & par la ſeconde toujours logarithmique ; que dans

le cas de $c>b>a$, on aura, par la premiere méthode, $AT\frac{1}{\mu}$ toujours circulaire, & par la ſeconde d'abord circulaire & enſuite logarithmique, &c. & ainſi des autres cas.

52. Donc il n'y a aucun de ces ſix cas, où $AT\frac{1}{\mu}$ ne puiſſe être uniquement circulaire ou uniquement logarithmique, ſuivant qu'on employera la premiere ou la ſeconde méthode; & il y a même deux cas, ſavoir, le premier & le quatriéme, c'eſt-à-dire, $b>c>a$, ou $a>c>b$, dans leſquels $AT\frac{1}{\mu}$ ſera uniquement circulaire ou logarithmique, ſoit qu'on employe la premiere ou la ſeconde méthode, en obſervant ſeulement que ſi cette quantité eſt circulaire par l'une des deux méthodes, elle ſera logarithmique par l'autre, quoique les deux méthodes enſemble doivent donner le même réſultat total pour l'attraction du ſphéroïde à l'extrémité de l'axe $2c$; ce qui nous fournira quelques remarques dans la ſuite.

53. De plus, il eſt clair par les art. 12 & 29, que dans le cas de $b>c>a$ (I), & dans celui de $a>c>b$ (IV), la différentielle qui multiplie la quantité angulaire ou logarithmique $AT\frac{1}{\mu}$, dépend d'un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique; que dans aucun cas cette différentielle ne dépend d'un ſimple arc d'ellipſe ou d'hyperbole, & que dans tous

les autres cas, à l'exception des deux qu'on vient d'indiquer, elle dépend d'un arc d'ellipſe & d'un arc d'hyperbole à-la-fois.

54. On ſuppoſe dans l'article précédent que les coupes du ſphéroïde ſont perpendiculaires au plan de c & de b. Si elles l'étoient au plan de c & de a, alors les deux conditions de l'article précédent ſeroient, en mettant a pour b, & b pour a, $a>c>b$, & $b>c>a$, qui ſont préciſément les mêmes que les deux précédentes.

55. De-là, & de l'art. 52, il s'enſuit que les deux cas de $b>c>a$ (I), & $a>c>b$ (IV) ſont les deux cas qui donnent les réſultats les plus ſimples, puiſque d'une part la quantité $AT\frac{1}{\mu}$ eſt toujours logarithmique ou circulaire dans chacun de ces cas, & que de l'autre la quantité différentielle qui multiplie $AT\frac{1}{\mu}$ dépend uniquement dans ces deux cas d'un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, & dans tous les autres cas d'un arc d'ellipſe & d'un arc d'hyperbole.

56. La différentielle de la pag. 181, Tom. VI, *Opuſc.* ſe réduit en général à la forme $\frac{d\mu\sqrt{(A\mu^2+B)}}{\sqrt{(C\mu^2+D)}}\int\frac{d\mu}{E+F\mu\mu}$, μ^2 étant poſitif ou négatif. Or, en faiſant $A\mu^2+B=\zeta$, on a $\mu^2=\frac{\zeta-B}{A}$, ou (en ſuppoſant A négatif & $=-$

A') $\mu^2 = \frac{B-\tau}{A'}$, & la différentielle devient de cette forme $\frac{d\tau\sqrt{\tau}}{\sqrt{(\pm\tau\mp b)}\sqrt{(G\tau+H)}}\int\frac{d\tau}{\sqrt{(\pm\tau\mp B)}(L+M\tau)}$; nous avons vu de plus (art. 55) que la différentielle $\frac{d\tau\sqrt{\tau}}{\sqrt{(\pm\tau\mp B)}\sqrt{(G\tau+H)}}$, ſe réduit, lorſque c eſt moyen entre a & b, à la forme $\frac{d\tau\sqrt{\tau}}{\sqrt{(bb\pm f\tau-\tau\tau)}}$, dont l'intégrale, en ſuppoſant $u = \frac{b^2}{\tau}$ (Mém. Berl. 1746, p. 203, art. XX), eſt $-\frac{2\sqrt{(uu\mp fu-bb)}}{\sqrt{u}}$ + un arc d'hyperbole, ou, ce qui eſt la même choſe, $-\frac{2\sqrt{(bb\pm f\tau-\tau\tau)}}{\sqrt{\tau}}$ + un arc d'hyperbole, ou enfin $-2\sqrt{[(\pm\tau\mp b)(G\tau+H)]}$ + un arc d'hyperbole; donc la différentielle propoſée ſera $d\,(arc.\,hyp.) \times \int\frac{d\tau}{\sqrt{(\pm\tau\mp B).(L+M\tau)}} - d\left(\frac{2\sqrt{[(\pm\tau\mp B)(G\tau+H)}}{\sqrt{\tau}}\right)\int\frac{d\tau}{\sqrt{(\pm\tau\mp B)(L+M\tau)}}$. Or l'intégrale de cette derniere partie ſera $-\frac{2\sqrt{[(\pm\tau\mp B).(G\tau+H)]}}{\sqrt{\tau}} \times \int\frac{d\tau}{\sqrt{(\pm\tau\mp B)(L+M\tau)}} + \int\frac{2\,d\tau\sqrt{(G\tau+H)}}{\sqrt{\tau}(L+M\tau)}$, & cette derniere quantité s'intégre aiſément par des arcs de cercle, ou des logarithmes.

57. Donc l'intégrale de la différentielle qui exprime l'attraction à l'extrémité de l'axe $2c$, dans le cas où c eſt moyen entre a & b, ſe réduit à des quantités logarithmiques ou circulaires, plus à la différentielle d'un

ſimple arc d'hyperbole, multipliée par une quantité toujours logarithmique ou toujours circulaire.

58. Dans le cas où $AT\frac{1}{\mu}$ eſt imaginaire, & ſe change (article 23) en une quantité logarithmique $\log.\left(\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right)$, ſi on veut réduire la différentielle de la page 181, Tom. VI, *Opuſc.* à une forme analogue à celle de l'art. 13, on ſuppoſera $\log.\left(\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right)=\zeta$, ou $\frac{\mu'+1}{\mu'-1}=e^{\zeta}$, ce qui donnera $\mu'+1=\mu' e^{\zeta}-e^{\zeta}$ & $\mu'=\frac{e^{\zeta}+1}{1-e^{\zeta}}$; ſubſtituant cette valeur, on aura une quantité beaucoup plus compliquée que celle de l'article 13, & dont l'intégration demeurera toujours très-difficile.

59. Lorſque $c=a$, ſi on coupe le ſphéroïde par des plans paſſant par l'extrémité de l'axe $2c$, & perpendiculaires au plan de c & de a, on aura, par la méthode de M. Maclaurin, l'attraction du ſphéroïde, qui ſera celle de l'attraction à l'équateur dans un ſphéroïde de révolution, & qui ne renferme que des logarithmes ou des arcs de cercle. Mais dans ce même cas, ſi on coupe le ſphéroïde par des plans paſſans par l'extrémité de l'axe $2c$, & perpendiculaires au plan de c & de b, alors, dans le cas de $b>c$, on auroit (à cauſe de $c=a$, qui donne $\zeta^2+\alpha^2\zeta^2=1$) la différentielle

rentielle $d\mu\sqrt{[\mu^2(1-\zeta^2)-\zeta^2]}\times AT\frac{1}{\mu}$, ou $d\mu\sqrt{(a\mu^2-\zeta^2)}\times AT\frac{1}{\mu}$ (art. 10), qui renferme une différentielle logarithmique multipliée par un arc de cercle, & dans le cas de $b<c$, on auroit (art. 29 & 30) $d\mu'\sqrt{[\mu'^2(\zeta^2-1)-\zeta^2]}\times\log.\left(\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right)$, qui renferme une différentielle logarithmique multipliée par une quantité logarithmique; & dans l'un & l'autre cas l'intégration reste très-difficile par la première méthode, quoiqu'elle soit très-facile par la seconde.

60. Enfin, si $a=b$, c'est-à-dire, si $\zeta=1$, la différentielle sera $\frac{d\mu\sqrt{(-\zeta^2)}}{\sqrt{(\zeta^2a^2\mu^2+\zeta^2a^2+\zeta^2)}}\times AT\frac{1}{\mu}$, ou plutôt, en faisant $\zeta^2=1$, & changeant les signes des radicaux $\frac{d\mu}{\sqrt{\left(a^2\mu^2+\frac{b^2}{c^2}\right)}}\times AT\frac{1}{\mu}$, ou si $b>1$, ce qui donne $b<c$, $\frac{d\mu'}{\sqrt{\left(\frac{b^2}{c^2}-a^2\mu'^2\right)}}\times\log.\left(\frac{1+\mu'}{\mu'-1}\right)$; a^2 étant négatif, d'où l'on voit que l'intégration est encore très-difficile, quoique par la formule de la page 184, Tom. VI, elle devienne beaucoup plus simple.

61. On voit par-là combien le choix des méthodes, & des formules est essentiel pour parvenir d'une manière plus simple & plus facile à la détermination de l'attraction d'un sphéroide; & c'est ce qu'on va voir encore

par les recherches que nous allons faire ſur l'intégration de la formule de la page 184, dont nous venons de parler.

62. Venons donc préſentement à la formule de la page 184 du Tom. VI de nos *Opuſcules*, laquelle donne d'une autre maniere l'attraction d'un ſphéroide elliptique dont tous les axes ſont inégaux, & ſuppoſons d'abord π réel, ce qui donne $\sqrt{(\pi\pi-1)}$ réel, ou $\pi^2 > 1$; car il eſt bon d'obſerver que dans la valeur de $\pi\sigma = \frac{\pi\pi-1}{\pi^2}$, π^2 eſt toujours une quantité réelle & poſitive, puiſque, $1-\sigma\sigma$ étant $= \frac{pp}{cc}$, & p étant un demi-diametre d'ellipſe ainſi que c, $1-\sigma\sigma$, & par conſéquent $\pi^2 = \frac{1}{1-\sigma\sigma}$ eſt toujours poſitif.

63. Il faut obſerver de plus que dans tous les cas le dénominateur $\sqrt{(\Delta^2-\varepsilon^2\pi^2+1)}\times\sqrt{(\varepsilon^2\pi^2-1)}$, (page 184 du Vol. cité), eſt $= \Delta\Delta$ cof. u ſin. u, & par conſéquent toujours réel. On doit ſeulement remarquer que ſi $\Delta^2 = \frac{bb}{aa}-1$ eſt négatif, c'eſt-à-dire, ſi $b<a$, (car $\varepsilon^2 = \frac{bb}{cc}$ eſt toujours poſitif) il faudra changer les ſignes des quantités qui ſont ſous les deux ſignes radicaux; car $\varepsilon^2\pi^2-1 = \frac{bb}{cc}\times\left[\frac{cc}{bb}(1+\Delta^2\text{ cof. }u^2)\right]-1 = \Delta^2$ cof. u^2, & $\Delta^2-\varepsilon^2\pi^2+1 = \Delta^2+\Delta^2$ cof. $u^2 = \Delta^2$ ſin. u^2. Donc ſi Δ^2 eſt négatif, on a $\Delta^2 = -k^2$,

$\epsilon^2\pi^2 - 1 = -k^2 \text{ cof. } u^2$, & $\Delta^2 - \epsilon^2\pi^2 + 1 = -k^2 \text{ fin. } u^2$. Donc il faut changer les ſignes des quantités qui ſont ſous les deux ſignes radicaux, afin que le produit (qui eſt toujours réel) ſoit formé de deux quantités réelles.

64. On peut remarquer encore que $\log. \frac{1+\sigma}{1-\sigma} =$ $\log. [\pi + \sqrt{(\pi^2 - 1)}] - \log. [\pi - \sqrt{(\pi^2 - 1)}] =$ $\log. \left(\frac{\pi+\sqrt{(\pi^2-1)}}{\pi-\sqrt{(\pi^2-1)}}\right) = \log. [\pi + \sqrt{(\pi^2-1)}]^2 =$ $2 \log. [\pi + \sqrt{(\pi^2-1)}]$, π étant l'abſciſſe de l'hyperbole dont l'axe eſt 1, & $2 \log. [\pi + \sqrt{(\pi^2-1)}]$ repréſentant le ſecteur correſpondant.

65. Si σ eſt réel, alors ſoit ſuppoſé $\log. \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right) = \gamma$, ce qui donnera $\frac{1+\sigma}{1-\sigma} = e^\gamma$, & $\sigma = \frac{e^\gamma - 1}{e^\gamma + 1}$; ſoit $\sigma' = \frac{1}{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{(e^\gamma - 1)}}$, on aura pour transformée $\frac{2e^\gamma d\gamma}{\sqrt{[(e^\gamma - \epsilon^2)(\epsilon^2 e^\gamma - 1)]}}$, quantité dans laquelle il faudra mettre pour e & e^γ, leurs valeurs en ϵ^2.

66. Nous avons vu ci-devant comment les logarithmes ſe changent en arcs de cercle, & réciproquement, lorſque σ eſt imaginaire, ou σ^2 négatif. Ainſi nous ne nous arrêterons pas ſur ce point; nous remarquerons ſeulement, 1°. que dans le cas où σ eſt imaginaire, & σ^2 négatif, alors $\pi^2 - 1$ eſt négatif, puiſque $\pi^2 - 1 = \frac{ee}{1-ee}$, quantité négative, d'où il s'enſuit que

comme la quantité $\log.\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$ renferme alors des quantités imaginaires, ſi on fait $s=\frac{\sqrt{-1}}{s'}$; cette quantité ſe change en $2\sqrt{-1}$ multiplié par l'arc p, dont la tangente eſt $\frac{1}{s'}$, or, comme on a $\frac{1}{1-ss}=\pi^2$, on trouvera $\frac{1}{s'}=\frac{\sqrt{(1-\pi^2)}}{\pi}$, $s'=\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi\pi)}}$, & $ds'=\frac{d\pi}{(1-\pi\pi+1)^{\frac{1}{2}}}$; donc puiſque $\frac{1}{s'}=\frac{\text{ſin. }p}{\text{cof. }p}$, π ſera le coſinus de l'angle p, & $\sqrt{(1-\pi^2)}$ ſon ſinus, & la différentielle ſe réduira à $\frac{p\pi^2 d\pi'}{\sqrt{(1^2-\iota^2\pi^2+1)}\sqrt{(\iota^2\pi^2-1)}}$; donc, à cauſe de $s'=\frac{\text{cof. }p}{\text{ſin. }p}$, & de $\pi^2=\text{cof. }p^2$, on aura pour transformée une quantité de cette forme: $\frac{p\,dp\,\text{cof. }p^2}{\text{ſin. }p^2\sqrt{(A+B\,\text{cof. }p^2+C\,\text{cof. }p^4)}}$, qu'on peut encore changer (en faiſant $\text{cof. }p^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\text{cof. }2p$, & $2p=v$) en

$$\frac{v\,dv\,(1+\text{cof. }v)}{(1-\text{cof. }v)\sqrt{(A+B'\,\text{cof. }v+C'\,\text{cof. }v^2)}}=$$
$$\frac{v\,dv\,(1+\text{cof. }v)}{(1-\text{cof. }v)\sqrt{(F+G\,\text{cof. }v+H\,\text{cof. }v^2)}}.$$

67. Mais comme toutes ces transformations, quoiqu'en apparence plus ſimples que la différentielle de la page 184, ne rendent pas l'intégration plus facile, nous allons nous borner à chercher l'intégrale de la quantité qui multiplie $\log.\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$ dans cette diffé-

rentielle ; σ étant ſuppoſé réel ou imaginaire, c'eſt-à-dire, $\pi^2 \geq$ ou ≤ 1, & de plus (art. 62) Δ^2 poſitif ou négatif.

68. Nous avons donc ici quatre cas à examiner,

1°. Celui de $\pi^2 > 1$ & de Δ^2 poſitif.

2°. Celui de $\pi^2 > 1$ & de Δ^2 négatif.

3°. Celui de $\pi^2 < 1$ & de Δ^2 poſitif.

4°. Celui de $\pi^2 < 1$ & de Δ^2 négatif.

69. Remarquons encore que, puiſqu'en général $\pi^2 = \frac{1}{1-\sigma\sigma}$, $\sigma\sigma$ étant poſitif ou négatif, & que $1-\sigma\sigma = \frac{f^2}{c^2}$, il s'enſuit que $\pi^2 > 1$ donne $\sigma\sigma < 1$, & par conſéquent $\frac{f^2}{c^2} < 1$, ou $c > f$; par la même raiſon $\pi^2 < 1$ donne $c < f$.

70. Donc, puiſque f eſt moyen entre a & b, il eſt clair que π ſera toujours > 1 ſi c eſt $> a$ & $> b$, π toujours < 1 ſi c eſt $< a$ & $< b$, & que π ſera alternativement $>$ & < 1, ſi c eſt $> a$ & $< b$, ou $> b$ & $< a$.

71. De plus, la condition de Δ^2 poſitif exige que $b > a$: condition qui peut très-bien ſubſiſter avec celles de $\pi^2 >$ ou < 1, puiſque cette condition exige ſeulement que c ſoit $>$ ou $<$ que a & que b, ainſi on peut ſuppoſer à-la-fois $\pi^2 > 1$, ou $\pi^2 < 1$, & Δ^2 poſitif.

72. Par la même raiſon, la condition de Δ^2 négatif, exigeant $b < a$, cette condition pourra encore

ſubſiſter avec celle de $\pi^2 >$ ou < 1. De même, la condition de δ^2 poſitif ſubſiſtera avec la condition de $\pi^2 >$ & < 1 ſucceſſivement, pourvu qu'on ait $c > a$ & $< b$, ce qui donne $b > c > a$, mais elle ne ſubſiſtera pas avec la condition de $c > b$ & $< a$, qui donne $a > c > b$, & par conſéquent $a < b$. Parcourons maintenant ces différens cas, & premierement celui de $\pi^2 > 1$ & de δ^2 poſitif.

73. Dans ce cas, ſi l'on fait comme ci-deſſus, $\frac{\pi}{\sqrt{(\pi^2-1)}} = \frac{1}{\nu} = u$, on aura la différentielle exprimée en π, réduite à $\frac{u^2 du}{\sqrt{[(\delta^2+1)(u^2-1)-\varepsilon^2 u^4]}\sqrt{(\varepsilon^2 u^2 - u^4 + 1)}}$, qui, en faiſant $u^2 = x$, & $\delta^2 + 1 = \alpha^2$, dépend de la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\alpha^2 x - \varepsilon^2 x - x^2)}\sqrt{(\varepsilon^2 x - x + 1)}}$, dans laquelle les quantités qui ſont ſous chacun des ſignes radicaux, ſont poſitives, puiſqu'elles viennent des quantités $\delta^2 - \varepsilon^2\pi^2 + 1$ & $\varepsilon^2\pi^2 - 1$, ſuppoſées poſitives l'une & l'autre.

74. Or, on pourra s'aſſurer aiſément par les Mém. de Berlin de 1746, & par le Mém. précédent, §. III, ſi cette différentielle dépend de la rectification de l'ellipſe ſeule, ou de l'hyperbole ſeule, ou de celle de toutes les deux.

75. En effet, ſoit $\alpha^2 - \varepsilon^2 = \gamma$, & $\varepsilon^2 - 1 = \delta^2$, c'eſt-à-dire, $\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{c^2} = \gamma$, & $\frac{b^2}{c^2} - 1 = \delta^2$, on aura la

transformée $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\gamma x-a^2).\sqrt{(\mathcal{N}'x+1)}}}$, dans laquelle $\gamma x-a^2$ & $\mathcal{N}'x+1$ ſont poſitifs, & qui ſe réduira (Mém. précéd. §. III) à la rectification d'une ellipſe, ſi elle peut avoir la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f'x+xx-g'g')}}$, à celle d'une hyperbole, ſi elle peut avoir la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(xx-g'g'\pm f'x)}}$, ou la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm f'x-xx+g'g')}}$, & dans les autres cas, à celle des deux ſections coniques à-la-fois.

76. Or on a $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\gamma x-a^2).\sqrt{(\mathcal{N}'x+1)}}} =$ $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{[\gamma\mathcal{N}'xx+(\gamma-\mathcal{N}'a^2)x-a^2]}}$; & puiſque $a^2=\mathcal{N}'+1=\frac{b^2}{a^2}$ eſt toujours poſitif, il eſt clair que cette quantité ſe réduit à la rectification de l'ellipſe ſeule, ſi $\gamma\mathcal{N}'$ eſt négatif, & $\gamma-\mathcal{N}'a^2$ poſitif, c'eſt-à-dire, ſi $\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{c^2}\right)\times\left(\frac{b^2}{c^2}-1\right)$, eſt négatif, & $\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{c^2}-\left(\frac{bb}{cc}-1\right)\frac{b^2}{a^2}$ poſitif.

77. Or la premiere de ces conditions ne peut avoir lieu ſi γ eſt négatif & $\mathcal{N}'$ poſitif, car alors $\gamma\mathcal{N}'$ & $\gamma-\mathcal{N}'a^2$ ſeroient négatifs l'un & l'autre, mais elle aura lieu ſi γ eſt poſitif & $\mathcal{N}'$ négatif, c'eſt-à-dire, ſi $a^2>b^2$

& $\epsilon^2 < 1$, ce qui donne $\frac{b^2}{a^2} > \frac{b^2}{c^2}$, & $\frac{b^2}{c^2} < 1$; donc $a < c$, & $c > b$.

78. Or cette condition eſt préciſément celle qui réſulte de $\pi^2 - 1$ toujours poſitif, b étant d'ailleurs $> a$, comme l'exige la condition de $\mathcal{N}^2$ poſitif, donc ſi $c > b > a$ (II) (art. 41), la différentielle peut ſe conſtruire par un arc ſimple d'ellipſe.

79. Pour la réduction à un arc ſimple d'hyperbole, il faut que $\gamma\mathcal{N}'$ ſoit poſitif, c'eſt-à-dire, γ & $\mathcal{N}'$ tous deux poſitifs, car ils ne peuvent être tous deux négatifs, puiſqu'alors $\gamma - \mathcal{N}'\varpi^2$ ſeroit négatif dans la formule de l'art. 75. Donc $\varpi^2 - \epsilon^2$ & $\epsilon^2 - 1$ doivent être tous deux poſitifs, c'eſt-à-dire, $\frac{bb}{aa} - \frac{bb}{cc}$, & $\frac{bb}{cc} - 1$, tous deux poſitifs; donc $c > a$ & $b > c$; or cette condition a lieu lorſque $\pi^2 - 1$ eſt poſitif, & $\mathcal{N}^2$ poſitif, en obſervant ſeulement que π^2 ne ſera > 1 que dans une partie du ſphéroïde.

80. Comme $\varpi^2 = \mathcal{N}^2 + 1$ eſt toujours poſitif, étant $= \frac{b^2}{a^2}$, on voit aiſément que la propoſée ne peut ſe réduire à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b^2 \pm fx - xx)}}$, qui dépendroit auſſi de la rectification de l'hyperbole ſeule, mais combinée avec une quantité algébrique (Mém. de Berlin, 1746, pag. 203, art. XX).

81. Il eſt clair auſſi, qu'à cauſe de la quantité négative

tive $-\pi^2$, le radical de l'art. 75 ne peut jamais être rationnel.

82. Donc ſi π^2 eſt toujours >1 & Δ^2 poſitif, c'eſt-à-dire, ſi $c>b>a$ (II) (art. 41), la différentielle dépend d'un ſimple arc d'ellipſe, & ſi Δ^2 eſt poſitif & $\pi^2>1$, c'eſt-à-dire, ſi $b>c>a$ (I) (art. 41), la différentielle dépend d'un ſimple arc d'hyperbole; mais π^2 ne ſera >1 que dans une partie du ſphéroïde & <1 dans l'autre.

83. Suppoſons préſentement $\pi^2>1$ & Δ^2 négatif, & la différentielle de l'art. 73 ſera, en changeant les ſignes des quantités qui ſont ſous les radicaux au dénominateur, $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x^3-e^2x+e^2x)}\cdot\sqrt{(x-e^2x-1)}}$, qui ſe réduira à un arc ſimple d'ellipſe, ſi on peut ſuppoſer le radical de la forme $\sqrt{(a-x)}\cdot\sqrt{(x-6)}$, a étant $>x>6$; ce qui donne, 1°. e^2-e^2 négatif; 2°. $1-e^2$ poſitif; d'où $\frac{bb}{cc}<\frac{b^2}{a^2}$, & $1>\frac{b^2}{c^2}$;

3°. $\frac{e^2}{e^2-e^2}>\frac{1}{1-e^2}$, ou $e^2e^2<e^2$, ou $e^2<1$, ou $b<a$, ce qui réſulte déja de Δ^2 négatif. Donc $c>b$, $c>a$, & $b<a$: conditions qui ſubſiſteront en ſuppoſant π^2-1 toujours poſitif, & de plus Δ^2 négatif, donc $c>a>b$ (VI) (art. 41). Donc dans ce cas de $c>a>b$, la propoſée ſe conſtruit par un ſimple arc d'ellipſe.

84. Pour la réduction à un ſimple arc d'hyperbole, il faut que la différentielle puiſſe ſe réduire à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-\epsilon)}\sqrt{(x+\delta)}}$, qui donne ϵ^2-a^2 poſitif & $1-\epsilon^2$ poſitif, c'eſt-à-dire, $\frac{2b}{cc} > \frac{b^2}{a^2}$, & $1 > \frac{b^2}{c^2}$; donc $a > c$, & $c > b$; donc $a > c > b$ (IV) (art. 41), ce qui donne $a > b$, comme l'exige la ſuppoſition de Δ^2 négatif. Dans ce cas de $a > c > b$, π^2 n'eſt > 1, que dans une partie du ſphéroide.

85. La réduction à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, eſt impoſſible, par les mêmes raiſons que dans l'art. 80, à cauſe du ſigne négatif de α^2.

86. Examinons préſentement le cas où $\sqrt{(\pi^2-1)}$, étant imaginaire, c'eſt-à-dire, le cas où π^2 eſt négatif, la différentielle doit ſe changer en $\frac{\alpha^2 dx}{(-xx+1)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{(\Delta^2-\alpha^2x^2+1)}\sqrt{(\alpha^2x^2-1)}}$, ce qui ſuppoſe (art. 62) que Δ^2 eſt poſitif.

87. En faiſant $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} = u$, ce qui donne $x^2 = \frac{u^2}{1+u^2}$, la tranſformée ſera $\frac{u^2 du}{\sqrt{[(\Delta^2+1)(u^2+1)-\alpha^2u^2]}\sqrt{(\alpha^2u^2-u^2-1)}}$, qui, en faiſant $u^2 = x$ & $\Delta^2+1 = a^2$, dépend de la différen-

tielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(e^2x-c^2x+e^2)}\sqrt{(c^2x-x-1)}}$, ſur laquelle on fera des opérations analogues aux précédentes, pour ſavoir ſi elle eſt réductible à un ſimple arc d'ellipſe ou à un ſimple arc d'hyperbole, ou à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

88. On verra donc que pour la réduction à un ſimple arc d'ellipſe, il faut que la différentielle ſe réduiſe à cette forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}\sqrt{(c-x)}}$; donc c^2-1 doit être poſitif, & a^2-c^2 négatif, c'eſt-à-dire, $\frac{bb}{cc}>1$, & $\frac{bb}{aa}<\frac{bb}{cc}$. Donc $b>c$ & $c<a$; de plus, b^2 étant poſitif (*hyp.*), on a $b>a$; donc $b>a>c$, ce qui donne π^2 toujours >1. Donc ſi on a $b>a>c$ (V) (art. 41), la différentielle dépend d'un ſimple arc d'ellipſe. Pour la réduction de la même différentielle à un ſimple arc d'hyperbole, il faut que la différentielle ſe réduiſe à $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}\sqrt{(x+b)}}$, ce qui donne c^2-1 poſitif, & a^2-c^2 poſitif, ou $b>c$ & $c>a$, donc $b>c>a$ (I) (art. 41); condition qui ſuppoſe que π^2 ne ſera <1 que dans une partie du ſphéroide. Pour la réduction à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, il faudroit que la différentielle ſe réduiſit à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x+b)}.\sqrt{(x-a)}}$, qui eſt impoſſible ici, où a^2 eſt poſitif.

89. Suppoſons enfin $x^2<1$, & δ^2 négatif, ce qui exige (art. 62) qu'on change les ſignes dans les radicaux du dénominateur de l'art. 87, & la différentielle ſera $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{[-e^2+e^2x-e^2x\sqrt{(1+x-e^2x^2)}]}}$, qui ſe réduira à un ſimple arc d'ellipſe, ſi le radical peut être ſuppoſé de la forme $\sqrt{(\alpha-x)}.\sqrt{(x-\mathfrak{C})}$, c'eſt-à-dire, ſi $1-e^2$ eſt négatif, & e^2-a^2 poſitif; ce qui donne $1<\frac{b^2}{c^2}$ & $\frac{b^2}{c^2}>\frac{b^2}{a^2}$, ou $c<b$ & $a>c$; donc $a>b>c$ (III) (art. 41), ce qui s'accorde avec la ſuppoſition de δ^2 négatif, & de x^2-1 toujours négatif.

90. Pour la réduction à un arc ſimple d'hyperbole, il faut que le radical ſe réduiſe à la forme $\sqrt{(x-\alpha)}.\sqrt{(x+\mathfrak{C})}$, ce qui donne $1-e^2$ poſitif, & e^2-a^2 poſitif, ou $1>\frac{b^2}{c^2}$ & $\frac{b^2}{c^2}>\frac{b^2}{a^2}$; donc $c>b$ & $a>c$; donc $a>c>b$ (IV) (art. 41); ce qui s'accorde encore avec la ſuppoſition de δ^2 négatif, & de $x^2<1$ dans une partie ſeulement du ſphéroide.

91. Le terme négatif $-a^2$, rend impoſſible la réduction à un arc d'hyperbole, combiné avec une quantité algébrique.

92. Donc la propoſée ſera réductible à un ſimple arc d'ellipſe ſi on a

(art. 78) $c>b>a$ (II.) (L),
(art. 83) $c>a>b$ (VI.) (L),
(art. 88) $b>a>c$ (V.) (C),
(art. 89) $a\geq b\geq c$ (III.) (C).

& à un ſimple arc d'hyperbole, ſi on a
(art. 79 & 87) $b > c > a$ (I.) (LC), ou (CL),
(art. 84 & 90) $a > c > b$ (IV.) (LC), ou (LC).

Mais dans ces deux derniers cas, comme c eſt plus grand que l'un des deux demi-axes a, b, & plus petit que l'autre, π^2 ſera ſucceſſivement < 1 & > 1, & la quantité qui multiplie la différentielle ſera ſucceſſivement logarithmique & circulaire. Dans les quatre autres cas, la quantité qui multiplie la différentielle ſera ſeulement, ou logarithmique, ou circulaire, comme le marquent les ſignes (L), (C), (LC), &c.

93. Donc dans tous les cas poſſibles de l'inégalité des trois diametres, la différentielle qui multiplie la quantité logarithmique ou circulaire, eſt réductible à un ſimple arc d'ellipſe, ou à un ſimple arc d'hyperbole; mais dans ce dernier cas, la quantité qui multiplie la différentielle ſera ſucceſſivement logarithmique & circulaire.

94. Donc dans tous les cas où c eſt $> a$ & $> b$, ou bien dans leſquels $c < a$ & $< b$, on pourra réduire l'attraction élémentaire du ſphéroïde à une différentielle d'arc d'ellipſe, multipliée par une quantité logarithmique ou circulaire.

95. Et dans les cas où c eſt moyen entre les deux axes, on pourra réduire cette attraction élémentaire, ou (art. 92) à la différentielle d'un arc ſimple d'hyperbole multiplié par une quantité ſucceſſivement logarithmique & circulaire, ou (art. 53) à la différen-

tielle d'un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, multipliée par une ſimple quantité logarithmique ou circulaire, ce qui eſt beaucoup plus ſimple.

96. Donc dans le cas où c eſt $> a$ & $> b$, ou bien $c < a$ & $< b$, il faudra employer de préférence (art. 92) la formule de la page 184 du Tom. VI de nos *Opuſcules*, après avoir ſimplifié cette formule par les réductions des art. 78, 83, 88 & 89, & dans le cas où c eſt moyen entre a & b, il faudra employer de préférence (art. 51) la formule de la page 181 du même Volume.

97. Combinant maintenant ſous un même point de vue les trois méthodes, ſavoir, les deux de l'art. 51, & celle des coupes par l'axe $2c$, que j'appelle la troiſiéme méthode, on aura (art. 51 & 92)

I. $b > c > a$ $(C)(L)(LC)$ ou (CL),
II. $c > b > a$ $(C)(LC)(L)$,
III. $a > b > c$ $(L)(CL)(C)$,
IV. $a > c > b$ $(L)(C)(LC)$ ou (CL),
V. $b > a > c$ $(CL)(L)(C)$,
VI. $c > a > b$ $(LC)(C)(L)$.

98. Donc de ces ſix formules, la premiere & la quatriéme donnent, indépendamment des quantités purement logarithmiques ou circulaires (art. 56 & 96), la différentielle d'un arc d'hyperbole multiplié par une quantité purement logarithmique ou circulaire, & les

quatre autres donnent la différentielle d'un arc ſimple d'ellipſe, multiplié par une quantité purement logarithmique ou circulaire.

99. Il ne ſera pas difficile par les formules que nous avons données dans les Mém. de Berlin de 1746, & dans le Mém. précéd. §. III, de trouver les axes de l'ellipſe & de l'hyperbole dont la rectification donne l'intégrale des différentielles trouvées dans les articles précédens. Par exemple, dans le premier cas (art. 74), on aura le radical de cette forme $\sqrt{\left(x+\frac{a^2}{a^2-c^2}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{1-c^2}-x\right)}$, a^2-c^2 étant poſitif, & $1-c^2$ poſitif, de ſorte que l'équation $fr-rr=bb$ des Mém. de Berlin, 1746, pour trouver les demi-axes r & b de l'ellipſe, donne $b^2=\frac{a^2}{(a^2-c^2)(1-c^2)}$, $f=\frac{2a^2}{a^2-c^2}$, $\frac{r}{1-c^2}=\frac{2a^2-c^2-c^2a^2}{(a^2-c^2)(1-c^2)}$; donc r ou $\frac{f}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{ff}{4}-bb\right)}$, donne l'axe $2r=f+\sqrt{(f^2-4bb)}=\frac{2a^2-c^2-c^4a^2\pm(c^2-c^2a^2)}{(a^2-c^2)(1-c^2)}=\frac{2a^2}{a^2-c^2}$, ou $\frac{2}{1-c^2}$. On ſe ſouviendra que $1-c^2=1-\frac{b^2}{a^2}$, & que $a^2=b^2+x=\frac{bb}{aa}$; l'unité eſt repréſentée ici par la quantité conſtante qui eſt $=\frac{uu}{x}$, puiſque $uu=x$. Il en ſera de même des autres cas.

100. On peut remarquer encore que uu ou (art. 74) $\pm\frac{1}{ee}=\frac{1}{1-\frac{ff}{ee}}$, ou $\frac{1}{\frac{ff}{ee}-1}$, d'où $u=\frac{e}{\sqrt{(ee-ff)}}$, ou $\frac{e}{\sqrt{(ff-ee)}}$, c'eſt-à-dire, égal au demi-axe e diviſé par l'excentricité de l'ellipſe dont les demi-axes ſont e, f.

101. A l'égard des abſciſſes z de cette ellipſe, priſes ſur l'axe r, elles ſeront données (Mém. de Berlin, 1746) par l'équation $rx=rr+\left(\frac{bb}{rr}-1\right)zz$, ou $\frac{a^4}{a^4-a^2}uu=\frac{a^4}{(a^2-a^2)^2}+\left[\frac{a^2}{(a^2-a^2)(1-a^2)}\times\frac{(a^2-a^2)^2}{a^4}-1\right]zz$, ou enfin $\frac{a^4}{a^4-a^2}\times\frac{1}{ee}=\frac{a^4}{(a^2-a^2)^2}+\left[\frac{(a^2-1)a^2}{a^2(1-a^2)}\right]zz$.

102. Il eſt aiſé de voir par nos formules de la page 184 du Tom. VI, *Opuſc.* que dans un ſecteur du ſphéroïde infiniment petit & allongé, l'attraction à l'extrémité de l'axe dépend des logarithmes, & que ſi les ellipſes ſont applaties, elle dépend des arcs de cercle; on voit au contraire que dans la méthode des coupes elliptiques, pag 178, art. 104, l'attraction dépend des arcs de cercle, ſi les ellipſes ſont allongées; & des logarithmes ſi elles ſont applaties, c'eſt que dans le premier cas l'attraction a pour élément $\frac{dy\,\sin y\cos y^2}{1+a\cos y^2}$, qui dépend des logarithmes, ſi a eſt négatif,

négatif, ce qui arrive quand l'ellipſe eſt allongée, & que dans le ſecond cas l'attraction a pour élément $\frac{dy \cos y^2}{1+\alpha' \cos y^2}$, & que cette derniere, en faiſant $\cos. y^2 = 1 - \sin. y^2$, devient $\frac{dy \cos y (1-\sin y^2)}{1+\alpha-\alpha' \sin. y^2}$, dont le dénominateur (qui ne peut jamais être négatif dans ſa totalité) devient $A+B \sin. y^2$, ſi α' eſt négatif, ce qui arrive quand l'ellipſe eſt allongée; de ſorte que l'intégration dépend alors des arcs de cercle.

103. Nous avons vu juſqu'ici qu'on peut employer trois méthodes pour déterminer l'attraction à l'extrémité de l'axe $2c$, celle des coupes elliptiques paſſant par cette extrémité, & perpendiculaire au plan de c & de b, celle des coupes elliptiques paſſant par cette même extrémité, & perpendiculaire au plan de c & de a; enfin, celle des tranches elliptiques qui ont toutes $2c$ pour axe commun.

104. On a vu de plus que chacune de ces méthodes, donne dans les différentielles, ou des logarithmes ſeulement, ou des arcs de cercle ſeulement, ou alternativement l'un & l'autre ſelon les différens cas, quoiqu'on puiſſe toujours, parmi ces trois méthodes, en choiſir une qui ne donne que des logarithmes ou que des arcs de cercle.

105. La différence de ces formules eſt d'autant plus digne de remarque, que le réſultat de ces trois méthodes doit être le même, quoique les expreſſions des

différentielles ſoient très-peu ſemblables, les unes contenant des arcs de cercle, les autres des logarithmes.

106. On pourroit croire que la difficulté de trouver l'attraction d'un ſphéroide dont tous les axes ſont inégaux, tient à ce mêlange alternatif des quantités logarithmiques ou circulaires dans les expreſſions de la différentielle, & à la difficulté de paſſer de l'un à l'autre, dans le cas où le réſultat eſt LC, ou à tranſformer un réſultat dans l'autre, lorſque l'un eſt L, & l'autre C, ou réciproquement.

107. Cette idée pourroit être fondée juſqu'à un certain point; cependant elle ne le ſeroit pas toujours dans des calculs de cette eſpece, car ſuppoſons, par exemple, qu'on ait à intégrer la différentielle $\frac{x^2 dx}{1+\rho xx}$ $\int \frac{dx}{1+\rho xx}$, ρ étant ſucceſſivement poſitif & négatif; il eſt clair que dans le premier cas on aura des arcs de cercle dans la formule, & dans le ſecond des logarithmes, cependant l'intégrale abſolue eſt en général celle de $\frac{dx}{\rho}\left(1-\frac{1}{1+\rho xx}\right) \times \int \frac{dx}{1+\rho xx}$, laquelle, en regardant d'abord ρ comme conſtant, & x ſeulement comme variable, eſt $\frac{x}{\rho}\int \frac{dx}{1+\rho xx} - \int \frac{x dx}{\rho(1+\rho xx)}$ $- \frac{1}{\rho}\left(\int \frac{dx}{1+\rho xx}\right)^2 + R$, R étant une conſtante qui dépend de ρ; dans cette quantité, le terme

$\int \frac{n\,dx}{x(1+px^2)} = \frac{1}{2p^2}\log.(1+px^2)$, & il eſt évident que $\int \frac{dx}{1+px^2}$ exprimera un arc de cercle ou un logarithme, l'arc de cercle étant $\frac{1}{\sqrt{p}} AT.x\sqrt{p}$, & le logarithme $\frac{1}{\sqrt{p'}}\log.\left(\frac{1+x\sqrt{p'}}{1-x\sqrt{p'}}\right)$, en ſuppoſant $p' = -p$; de maniere que, ſi p eſt enſuite ſuppoſée variable, & ſucceſſivement poſitive & négative, on repaſſera aiſément de l'expreſſion logarithmique à l'expreſſion circulaire, ou réciproquement.

108. On peut même, ce qui eſt à la vérité un peu plus difficile, transformer en arc circulaire, ou réciproquement l'intégrale d'une différentielle qui renferme des logarithmes ou des arcs de cercle. Prenons pour exemple un cône dont on veut chercher la ſolidité; on ſait que, ſi l'on nomme x & y les abſciſſes & les ordonnées du triangle générateur de ce cône, priſes depuis le ſommet du triangle, & qu'on appelle 2π le rapport de la circonférence au rayon, on aura la ſolidité du cône $= \frac{\pi y y x}{3}$; ou $\frac{\pi x^3}{3}$, en ſuppoſant $y = x$, de maniere que $\frac{c\pi a^2}{3}$ ſera la ſolidité totale, en prenant c pour la hauteur du cône. Maintenant imaginons qu'on coupe ce cône paralèlement à ſon axe, c'eſt-à-dire, aux x, on formera des hyperboles, dont les aires ſeront, comme l'on ſait, exprimées par des

quantités logarithmiques, & ſi on appelle A ces différentes aires, on aura $\int A\,dy$ pour la ſolidité du cône, ou plutôt $\int -A\,dy$, parce que, y croiſſant, ces aires diminuent. Suppoſons, pour plus de ſimplicité, que le triangle générateur ſoit iſoſcele, & faiſons $y' = c - y$, (c étant le rayon de la baſe du cône, égal (*hyp.*) à la hauteur), on aura l'abſciſſe totale de chaque hyperbole (priſe depuis le centre) $= c$, l'ordonnée $= \sqrt{(2cy' - y'y')}$, & le demi-axe tranſverſe de chaque hyperbole $= y = c - y'$, d'où il eſt aiſé de voir que l'hyperbole ſera équilatere, puiſque le quarré de l'abſciſſe c^2, moins le quarré de l'axe $(c-y')^2$, eſt égal au quarré de l'ordonnée $2cy' - y'y'$. Or ſoit $dz\sqrt{(zz - aa)}$ l'élément de l'aire d'une hyperbole équilatere, on ſait que l'intégrale de cette quantité eſt $\frac{z\sqrt{(zz-aa)}}{2} - \int \frac{a^2\,dz}{2\sqrt{(zz-aa)}} = \frac{z\sqrt{(zz-aa)}}{2} + \frac{a^2}{2}\log.\left(\frac{z-\sqrt{(zz-aa)}}{a}\right)$, ſubſtituant $c-y'$ pour a, & c pour z, on aura l'aire A de l'hyperbole dont il s'agit, $= \frac{c\sqrt{(2cy'-y'y')}}{2} + \frac{(c-y')^2}{2}\log.\left(\frac{c-\sqrt{(2cy'-y'y')}}{c-y'}\right)$; donc $A\,dy' = \frac{dy'\sqrt{(2cy'-y'y')}}{2} + \frac{dy'(c-y')^2}{2}\log.\left(\frac{c-\sqrt{(2cy'-y'y')}}{c-y'}\right)$. La premiere partie renfermera viſiblement des arcs de cercle dans ſon intégrale. A l'égard de la ſeconde, il faut d'abord, pour la ſim-

plifier, mettre y à la place de $c-y'$, & elle deviendra $-\frac{y^2 dy}{2}\log.\left(\frac{c-\sqrt{(cc-yy)}}{y}\right)$, ou $y^2 dy \int\left(-\frac{dy}{y}+\frac{ydy}{\sqrt{(cc-yy)}}\times\left[\frac{2}{cc-\sqrt{(cc-yy)}}\right]\right)$, faisant $c-\sqrt{(cc-yy)}=u$, on aura $yy=2cu-uu$; & la transformée sera $(cdu-udu)\sqrt{(2cu-uu)}$, multiplié par $\int-\frac{cdu+udu}{2cu-uu}+\int\frac{du}{u}=(cdu-udu)\times\sqrt{(2cu-uu)}\times\int-\frac{cdu}{2cu-uu}=y^2dy\int-\frac{cdu}{2cu-uu}$, dont l'intégrale est $\frac{y^3}{3}\log.\left(\frac{c-\sqrt{(c^2-y^2)}}{y}\right)-\int\frac{y^3}{3}\times\frac{cdu}{2cu-uu}+B$, B étant une constante qui rende l'intégrale $=0$, lorsque $y=c$; & complette lorsque $y=0$. Or il est visible, sans aller plus loin, que la partie qui est sous le signe $\int$ renfermera, par la substitution de $\sqrt{(2cu-uu)}$, au lieu de y, le radical $\sqrt{(2cu-uu)}$, & sera par conséquent intégrable par des arcs de cercle; & que la partie logarithmique est nulle lorsque $y=c$, & son coefficient y^3, lorsque $y=0$. Ainsi les logarithmes disparoîtront de l'intégrale totale, & les arcs de cercle prendront leur place.

109. La transformation des deux intégrales l'une dans l'autre seroit encore plus remarquable & plus digne d'attention, dans le cas où l'on ne chercheroit pas la solidité totale du cône, mais celle d'une partie

ſeulement, par exemple, d'un ongler quelconque qui ſeroit formé par une hyperbole parallèle à l'axe, & dont la ſolidité doit ſe trouver également par les ſegmens hyperboliques parallèles à l'axe & par les ſegmens circulaires perpendiculaires au même axe. Nous venons de donner la maniere de trouver cette ſolidité par les ſegmens hyperboliques, à l'égard des ſegmens circulaires, il eſt clair que ſi on appelle b la diſtance de l'axe du cône à la plus grande & derniere des hyperboles, & $b+z$ le rayon de chaque cercle, on aura $\sqrt{(b^2+2bz+zz-b)^2}=\sqrt{(2bz+zz)}$, pour l'ordonnée; en ſorte que la queſtion ſe réduira à trouver l'intégrale de Bdz, B étant le ſegment d'un cercle dont le rayon eſt $b+z$, & l'ordonnée $\sqrt{(2bz+zz)}$, & à comparer enſuite l'intégrale de Bdz, avec celle de Ady qui doit lui être égale. C'eſt un calcul que nous abandonnons à nos Lecteurs, & dont il nous ſuffit d'avoir indiqué le procédé par le calcul précédent pour la ſolidité totale du cône.

110. Au reſte, ces calculs nous font voir, non-ſeulement comment, dans certains réſultats analytiques, les quantités logarithmiques ſe transforment en circulaires, & réciproquement, mais encore que lorſqu'on a à intégrer une quantité de cette forme $dpdq\times\varphi(p,q)$, il n'eſt pas indifférent, pour la ſimplicité du calcul, de commencer l'intégration par p ou par q, car on voit que la meſure de la ſolidité totale du cône, par les ſegmens hyperboliques, eſt beaucoup plus compliquée que

cette même meſure par des ſegmens circulaires perpendiculaires à l'axe.

§. III.

Différentes manieres de calculer l'attraction des Spheroïdes elliptiques, avec des Recherches ſur l'attraction de quelques autres Sphéroïdes.

Ce paragraphe étant une ſuite du précédent, j'y conſerverai l'ordre des numéros des articles.

111. Je joindrai ici différens eſſais pour trouver l'attraction d'un ſphéroïde elliptique, eſſais dont le ſuccès n'a pas à la vérité été tel que je le ſouhaitois, mais deſquels il eſt néanmoins réſulté quelques recherches qui pourront intéreſſer les Mathématiciens, & leur fournir ou leur occaſionner des vues plus heureuſes que les miennes.

112. Soit un ſphéroïde elliptique qui ne ſoit pas de révolution, & dont les axes ſoient $a < b < c$, il eſt clair que le demi-axe b eſt moyen entre a & c, & qu'ainſi dans l'ellipſe dont les demi-axes ſont a & c, il y aura un demi-diametre $= b$, par conſéquent l'ellipſe qui aura pour demi-axes a & b, ſera un cercle, & les coupes parallèles à ce cercle ſeront auſſi des

cercles. J'avois d'abord imaginé de chercher l'attraction du ſphéroide à l'extrémité du diametre qui paſſe par les centres de ces cercles, parce que cette attraction étant, par le théoréme de Maclaurin, en raiſon donnée avec les attractions dans l'axe, on auroit pu tirer de-là l'attraction du ſphéroide dans l'axe. Mais j'ai bientôt reconnu que ce moyen étoit pour le moins fort laborieux, & vraiſemblablement ne donneroit aucun réſultat ſatisfaiſant; car l'attraction de la ſeule circonférence d'un cercle ſur un point qui n'eſt pas placé immédiatement au-deſſus du centre, dépend de la rectification d'une ellipſe, & de plus, après cette intégration, il faut encore intégrer par deux autres variables ſucceſſivement.

113. En effet, ſoit (Fig. 14) $CA=r$, $CB=b$, $BD=a$, élevée perpendiculairement au plan du cercle dont le rayon eſt r, l'attraction que le point Z exerce ſur D, ſuivant DB, ſera, en faiſant l'angle $ACZ=\zeta$, proportionnelle à $\frac{r\,d\zeta}{(aa+bb-2br\cos.\zeta+rr)^{\frac{1}{2}}}$, ſoit $aa+bb+rr-2br\cos.\zeta=rx$; on aura $\cos.\zeta=\frac{aa+bb+rr-rx}{2br}$, & la transformée ſera $+\frac{r\,dx}{2br\,x^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\left[1-\left(\frac{aa+bb+rr-rx}{2br}\right)^2\right]}$. Soit $aa+bb+rr=rA$, & comme $aa+bb+rr$ eſt $>2br$, puiſque $bb-2br+rr$ eſt toujours poſitif, la tranſformée,

formée, en mettant à part les constantes, sera $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{AA+2Ax-xx}{4bb}\right)}}$, où la quantité $1-\frac{AA}{4bb}$ est négative, à cause de $A>2b$. Soit $2b=B$, il s'agit donc d'intégrer $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(BB-AA+2Ax-xx)}}$; or l'intégrale est $-\frac{\sqrt{(B^2-A^2+2Ax-xx)}}{\sqrt{x}(B^2-A^2)}-$ $\int\frac{\frac{1}{2}dx\sqrt{x}}{(B^2-A^2)\sqrt{(B^2-A^2+2Ax-xx)}}$, ou $\frac{\sqrt{(B^2-A^2+2Ax-xx)}}{A^2-B^2}+$ $\int\frac{\frac{1}{2}dx\sqrt{x}}{(A^2-B^2)\sqrt{(B^2-A^2+2Ax-xx)}}$; or puisque A est $>B$, B^2-A^2 est négatif. Donc (*Mém. de Berlin*, 1746, & *Memoire précédent*) la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(B^2-A^2+2Ax-xx)}}$ dépend de la rectification d'une ellipse, dont un des demi-axes est $\sqrt{(A^2-B^2)}$, & dont l'autre, que j'appelle r', est tel que $2Ar'-r'r'=A^2-B^2$, ce qui donne $(r'-A)^2=B^2$, & $r'=A\pm B$, on voit de plus que $A^2-B^2=\frac{(aa+bb+rr)^2-4bbrr}{rr}$, & que $A\pm B=\frac{aa+(b\pm r)^2}{r}$.

114. L'attraction du point D parallèlement à DB, dépendra de l'intégration de $\frac{d\zeta\cos.\zeta}{(aa+bb+rr-2br\cos.\zeta)^{\frac{1}{2}}}$,

& ſera encore plus compliquée que la précédente; puiſqu'elle dépendra, comme il eſt aiſé de le voir, d'une quantité de cette forme $\frac{dx}{\sqrt{\alpha}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx)}}$, & par conſéquent (Mém. de Berlin, 1746) de la rectification d'une ellipſe & d'une hyperbole.

115. Si $b=ma$, m étant un nombre conſtant, ce qui arrive, quand le diametre (art. 112) paſſe par les centres de tous les cercles, on trouvera aiſément que la différentielle de l'attraction du ſphéroide eſt $\frac{ardrdad\zeta}{(aa+m^2aa-2mar\cos\zeta+rr)^{\frac{1}{2}}}$ parallèlement à DB, & $\pm\frac{r^2drdad\zeta\cos\zeta+rdrdad\zeta\times ma}{(aa+m^2aa-2mar\cos\zeta+rr)^{\frac{3}{2}}}$ parallèlement à BC.

116. N'ayons égard ici qu'à la premiere de ces quantités. On pourroit eſſayer de l'intégrer en regardant d'abord r ſeule comme variable; ce qui donnera une intégrale algébrique, parce qu'en général l'intégrale de $\frac{rdr}{(A+Br+Crr)^{\frac{1}{2}}}$ eſt algébrique, on mettroit enſuite dans cette intégrale, au lieu de r ſa valeur $\sqrt{(Ba-Daa)}$, & on intégreroit en ne regardant que a comme variable, enfin on intégreroit de nouveau par rapport à ζ. Mais il eſt aiſé de voir que dès la ſeconde différentielle l'intégration ſeroit déja très-compliquée, à cauſe de la quantité $2mar$, qui renfermeroit un ſigne radical, & qui ſeroit encore elle-même ſous

un ſigne radical. Ainſi il n'y a pas d'apparence que cette méthode conduiſe à un réſultat plus ſimple que les précédens.

117. D'ailleurs cette méthode, quand elle réuſſiroit, ne donneroit pas en général l'attraction du ſphéroide à l'extrémité des trois axes, mais ſeulement à l'extrémité des axes $2a$ & $2c$, entre leſquels on ſuppoſe que l'axe $2b$ eſt moyen. Ainſi le problême général ne ſeroit pas réſolu, puiſqu'il faudroit néceſſairement, pour trouver l'attraction à l'extrémité de l'axe $2c$, que l'axe $2a$ ou l'axe $2b$ fût moyen entre les deux autres; donc ſi les axes $2a$, $2b$, ſont les deux axes extrêmes pour la valeur, c'eſt-à-dire, ſi $a>c>b$, ou $b>c>a$, on ne pourroit, par la méthode dont il s'agit, trouver l'attraction à l'extrémité de l'axe $2c$, moyen entre les deux autres.

118. Si on ſuppoſoit (art. 116) $Dca=aa+m^2a^2$, les formules ſe ſimplifieroient, mais l'intégration reſteroit toujours très-difficile, & d'ailleurs ce cas de $Dca=aa+m^2a^2$ n'appartiendroit qu'à un ſphéroide particulier.

119. Nous pouvons ici remarquer en paſſant, que dans un ſphéroide elliptique dont les axes a, b, c, ſont inégaux, & dans lequel un des axes quelconque b eſt moyen entre les deux autres a, c, on pourra toujours trouver de chaque côté de l'axe c, & à égale diſtance de cet axe, un plan perpendiculaire au plan de a & de c, & qui forme une ſection circulaire dans le ſphé-

roide. Il ne ſeroit pas non plus difficile de prouver que ces deux plans circulaires ſont les ſeuls qu'on puiſſe former dans le ſphéroide, & que le plan circulaire ne peut jamais être oblique au plan de *a* & de *c*. En effet, on s'aſſurera aiſément par le calcul, que pour que les rayons de la ſection ainſi formée ſoient égaux, c'eſt-à-dire, pour que leur valeur ſoit indépendante de l'angle que ces rayons font entr'eux, il faut que tous ces rayons ſe trouvent dans un plan perpendiculaire à celui de *a* & de *c*. On peut conſidérer encore que toutes les ſections parallèles à la ſection circulaire qui paſſe par le centre, ſeront auſſi circulaires, & que tous leurs centres ſeront dans la même ligne droite. Or de-là il eſt aiſé de faire voir que le plan des axes *a* & *c*, ſera perpendiculaire au plan de la ſection.

120. Paſſons préſentement à de nouvelles recherches ſur l'attraction des ſolides qui ſont formés, non par des ellipſes entieres, mais par des portions ou ſegmens d'ellipſe.

121. Si on fait tourner un ſegment d'ellipſe autour d'une corde quelconque, on pourra toujours déterminer l'attraction que le ſphéroide qui en réſulte exerce à ſon ſommet, ou, ce qui revient au même, à l'extrémité de la corde. Car l'équation de l'ellipſe, par rapport à cette corde, eſt en général $yy+mxy+nxx+ax+by=0$, où il n'y a point de terme conſtant, parce que (*hyp.*) x & y ſont nulles à-la-fois. Mettant

donc pour x, r cof. ζ, & pour y, r fin. ζ, on aura une valeur de r ſans radicaux en fin. ζ & cof. ζ, & comme l'attraction du ſphéroïde dépend de l'intégration de $r\,d\zeta$ fin. ζ cof. ζ, il s'enſuit, &c. Ainſi le théorême énoncé, Tom. VI de nos *Opuſcules*, pag. 245, art. 58, n'eſt qu'un cas particulier de celui-ci.

122. Il faut remarquer, 1°. que dans cette équation la valeur la plus grande de ζ eſt celle qui répond à $r=0$, & qui eſt fournie par l'équation a cof. $\zeta + b$ fin. $\zeta = 0$, ou tang. $\zeta = -\frac{a}{b}$. 2°. Que comme la corde qui ſert ici d'axe de rotation, partage l'ellipſe génératrice en deux parties inégales, on pourra imaginer autour de cette corde deux ſolides différens, dont on trouvera facilement l'attraction par la méthode précédente.

123. On trouveroit la même choſe pour un ſphéroïde formé par une courbe dont l'équation ſeroit $y^m + my^{m-1}x \ldots + nx^m + ay^{m-1} \ldots + bx^{m-1} = 0$; ce qu'il eſt très-facile de voir.

124. On trouveroit encore la même choſe, ſi dans cette derniere équation, on avoit, au lieu de y ou de x, le radical $\sqrt{(\gamma x^2 + \delta y^2)}$. Il faut ſeulement remarquer, que, comme l'intégration dépend de celle de $r\,d\zeta$ fin. ζ cof. ζ, & que $d\zeta$ fin. ζ cof. $\zeta = x\,dx$, en ſuppoſant fin. $\zeta = x$, la valeur de r doit être telle qu'elle ne contienne que des puiſſances paires de cof. ζ, afin qu'il n'y ait point dans la transformée d'autre radical que

celui qui viendra de $\sqrt{(\gamma x^4 + \delta y^4)}$, & qui ſera $\sqrt{(\gamma \text{ cof. } \zeta^4 + \delta \text{ ſin. } \zeta^4)} = \sqrt{(A + B x x)}$. Ainſi l'équation en y & en x doit être telle, qu'en ſubſtituant r cof. ζ pour x, & r ſin. ζ pour y, on n'ait dans la valeur de r, que des puiſſances paires de cof. ζ.

125. On peut encore conſidérer que l'attraction d'un cercle dont x eſt le rayon, ſur un point placé à la diſtance ρ au-deſſus de ſon centre, eſt $1 - \frac{\rho}{\sqrt{(\rho\rho + x x)}}$, Tom. VI, *Opuſc.* pag. 85. Ainſi nommant y les ordonnées de la courbe génératrice du ſphéroide, & ρ les abſciſſes, on aura pour l'élément de l'attraction $d\rho - \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho\rho + y y)}}$, faiſant $y = \rho\zeta$, cette quantité ſe changera en $d\rho - \frac{d\rho}{\sqrt{(1+\zeta\zeta)}}$, d'où l'on peut tirer l'équation, ou plutôt les conditions entre ρ & ζ, pour que l'attraction ſoit téductible à des arcs de ſections coniques.

126. Il ne ſeroit pas plus difficile de trouver par la même méthode la ſolidité de ce ſphéroide laquelle eſt $= \int r^3 d\zeta$ ſin. ζ, ou $\int y y d\rho = \int \zeta\zeta\rho^2 d\rho$. Je remarquerai à cette occaſion que la méthode donnée par M. Varignon (Mém. Acad. 1693), pour trouver la ſolidité du ſphéroide que forme une ellipſe en tournant autour d'un de ſes diametres obliques, n'eſt pas exacte, ce Géomètre n'ayant pas fait attention dans ſa ſolution à l'angle oblique des deux diametres, le ſolide dont il

s'agit eſt, comme on le peut voir aiſément, les deux tiers du ſolide formé par le parallélogramme circonſcrit, ainſi que la ſphere & le ſphéroide ſont les $\frac{2}{3}$ du cylindre, ou plutôt de l'eſpece de cylindre circonſcrit. Or, ſoient a, b les deux demi-axes de l'ellipſe, a', b' les deux demi-diametres conjugués, $2n$ le rapport de la circonférence au rayon, m le ſinus de l'angle des deux diametres, on ſait que $ab = a'b'm$, & $aa + bb = a'a' + b'b'$; de plus, les ſolides formés par les parallélogrammes circonſcrits ſont entr'eux comme abb à $a'b'b'mm$, c'eſt-à-dire, comme b à $b'm$, donc les ſphéroides ſont entr'eux comme b à $b'm$. Or l'équation $a' = \frac{ab}{b'm}$ donne b à $b'm$, comme a' eſt à a, donc les ſphéroides ſont auſſi en raiſon de a' à a, c'eſt-à-dire, que les ſphéroides formés par une ellipſe autour d'un de ſes diametres a', ſont en raiſon inverſe de ce diametre a', & en raiſon directe du diametre conjugué $b' \times m$, m étant le ſinus des deux diametres. Donc auſſi les ſphéroides autour de deux diametres conjugués, ſont en raiſon inverſe de ces diametres.

127. Si dans l'équation de l'art. 121 ci-deſſus, $yy + mxy + nxx + ax + by = 0$, on ajoute une conſtante c, alors le point attiré ſera placé dans l'axe du ſphéroide, ſoit au-dedans, ſoit au-dehors, & en ſubſtituant pour x, r cof. z, & pour y, r ſin. z, on aura $rr(\text{ſin. } z^2 + m \text{ ſin. } z \text{ cof. } z + n \text{ cof. } z^2) + r(a \text{ cof. } z + b \text{ ſin. } z) + c = 0$, d'où $r =$

$$\frac{-u\cos\zeta - b\sin\zeta}{2(\sin\zeta^2 + m\sin\zeta\cos\zeta + n\cos\zeta^2)} \pm \frac{\sqrt{[-4c(\sin\zeta^2 + m\sin\zeta\cos\zeta + n\cos\zeta^2) + (b\sin\zeta + u\cos\zeta)^2]}}{2(\sin\zeta^2 + m\sin\zeta\cos\zeta + n\cos\zeta^2)}.$$

Ainſi pour trouver en ce cas l'attraction du ſphéroïde, la difficulté ſe réduit à intégrer le radical précédent, multiplié par $d\zeta \sin\zeta\cos\zeta$, car la quantité non radicale qui entre dans la valeur de r, s'intégre d'ailleurs aiſément en faiſant $\sin\zeta = u$, & en faiſant diſparoître le radical $\sqrt{(1-uu)}$.

128. Or qu'on multiplie le haut de la fraction radicale $\frac{d\zeta \sin\zeta\cos\zeta\sqrt{(A\sin\zeta^2 + B\sin\zeta\cos\zeta + C\cos\zeta^2)}}{2(\sin\zeta^2 + m\cos\zeta\sin\zeta + n\cos\zeta^2)}$, par $\frac{\cos\zeta}{\cos\zeta}$, & le bas par $\frac{\cos\zeta^2}{\cos\zeta^2}$, & qu'on mette enſuite la tangente t pour $\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta}$, on aura la transformée

$$\frac{dt}{1+tt} \times \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}} \times \frac{1}{1+tt} \times \sqrt{(At^2 + Bt + C)} \times \frac{1+tt}{2(t^2 + mt + n)},$$

laquelle contenant un double radical, ne peut même être intégrée par des arcs de ſections coniques.

129. En effet, cette quantité ſe change en

$$\frac{A\,d\zeta \sin.2\zeta\sqrt{(B + C\sin.2\zeta + D\cos.2\zeta)}}{F + G\sin.2\zeta + M\cos.2\zeta} =$$

$$\frac{H\,du\sin u\sqrt{(B + C\sin.u + D\cos.u)}}{F + G\sin.u + M\cos.u} =$$

$$\frac{H\,du\sin u\sqrt{[B + L(\sin.u + a)]}}{F + N\sin.(u+\phi)} = \frac{M\,d\zeta\sin.(\zeta - \varepsilon)\sqrt{(B + L\sin.\zeta)}}{F + N\sin.(\zeta + \varepsilon)} =$$

$= Hd(\text{sin. } z)\text{ sin. }(z-a) \times \frac{\sqrt{(B+L\text{ sin. }z)}}{[F+N\text{ sin. }(z+c)]\text{ cos. }z}$. Soit $\sqrt{(B+L\text{ sin. }z)} = Ay+R$, A & R étant deux conſtantes indéterminées, on aura $B+L\text{ sin. }z = A^2y^2+2ARy+R^2$, $\text{sin. }z = \frac{A^2y^2+2ARy+R^2-B}{L}$, $\text{cos. }z = \frac{\sqrt{[L^2-(A^2y^2+2ARy+R^2-B)^2]}}{L}$. Faiſant, pour plus de ſimplicité, $R=0$, & $A=1$, on aura la transformée de cette forme $\frac{Sydy\times[Myy+N+P\sqrt{(1+Fyy+Gy^4)}]}{\sqrt{(1+Fyy+Gy^4)}} \times \frac{y}{F+Oyy+R+B\sqrt{(1+Fyy+Gy^4)}}$; multipliant haut & bas par $F+Oyy-B\sqrt{(1+Fyy+Gy^4)}$, le terme le plus compliqué ſera de cette forme $\frac{Hy^{2r}dy}{(L+Ky^2+My^4)\sqrt{(1+Fyy+Gy^4)}}$, quantité qui ne ſauroit s'intégrer par des arcs de ſections coniques.

130. On peut demander, à cauſe de l'équivoque du ſigne radical, qui exprime la valeur du rayon r, de quel ſigne on doit ſe ſervir pour exprimer cette valeur, au moins dans le cas où le point attiré eſt au-dedans du ſphéroide, car lorſqu'il eſt au-dehors, alors au lieu de la valeur de r, il faut, comme l'a remarqué M. de la Grange, employer la différence des deux valeurs, ce qui réduit l'expreſſion au ſeul ſigne radical.

131. Pour lever cette difficulté, on remarquera ſimplement que dans l'ellipſe génératrice du ſphéroide, r a deux valeurs, l'une poſitive, l'autre négative, &

que la poſitive exiſte dans le ſegment générateur, & la négative, dans le ſegment qui eſt le complément de celui-ci a l'ellipſe entiere, & comme ce dernier ſegment n'exiſte point dans le ſolide dont il s'agit, il eſt clair qu'il faut toujours prendre la valeur poſitive de r, c'eſt-à-dire, celle qui a le ſigne $+$ devant le ſigne radical, car lorſqu'une équation du ſecond degré a une valeur poſitive & une valeur négative, c'eſt évidemment le ſigne $+$ devant le ſigne radical qui déſigne la premiere de ces deux valeurs, & le ſigne $-$ la ſeconde.

132. Si on a une courbe dont l'équation ſoit $r = Z + V\zeta$, Z & ζ étant des fonctions rationnelles de ſin. χ & cof. χ, & que ζ ſoit telle qu'elle ne change point en faiſant cofin. χ négatif, & ſin. χ poſitif, alors il eſt viſible que dans la différentielle de l'attraction $rd\chi$ ſin. χ cof. χ, ſi on prend deux arcs correſpondans χ, & $180 - \chi$, que j'appelle χ', la difficulté ſe réduira à intégrer $d\chi(Z' - Z)$ cof. χ ſin. χ, & que par conſéquent on pourra trouver par les logarithmes, ou par les arcs de cercle, l'attraction du ſphéroide formé par cette courbe. On voit même que les quantités Z' & Z pourroient encore, ſi on le vouloit, contenir un radical de cette forme $V(A + B \text{ cof. } \chi^2)$ ſans que l'intégration devînt plus difficile.

133. On peut remarquer auſſi que ſi Z eſt tel qu'il devienne négatif en faiſant ſin. χ & cof. χ négatifs, c'eſt-à-dire en prenant $180 + \chi$ au lieu de χ, & qu'en même-temps ζ ne change point de valeur, alors les

deux courbes ſemblables que donnera la coupe du ſphéroïde par l'axe, appartiendront à la même équation. Car puiſque $r = Z + \sqrt{\zeta}$, il eſt clair que dans la courbe génératrice, qu'on ſuppoſe rentrante, étant priſe dans ſa totalité, r a deux valeurs $Z \pm \sqrt{\zeta}$, l'une poſitive, l'autre négative, & que ſi on fait $z' = 180 + z$, ces valeurs deviendront $Z' \pm \sqrt{\zeta'}$, ou $Z' \pm \sqrt{\zeta}$, puiſque ζ ne change point de valeur (*hyp.*). Donc la valeur négative $Z - \sqrt{\zeta}$ correſpondante à Z, & la valeur poſitive $\sqrt{\zeta} + Z'$ correſpondante à $180 + Z$ ſeront abſolument les mêmes avec des ſignes différens. Donc, &c.

134. Quoique je n'aye pu juſqu'à préſent intégrer la différentielle de l'attraction d'un ſphéroïde elliptique autrement que par des arcs de ſections coniques, cependant j'invite les Géomètres à cette recherche, dont le ſuccès ne me paroît pas déſeſpéré. J'imagine, par exemple, qu'on pourroit employer une méthode analogue à celle des art. 67 & ſuiv. du §. III du Mém. précédent, en joignant enſemble deux différentielles dont la ſomme fût réductible à des arcs de ſections coniques, quoique chacune en particulier ne le fût pas. Par exemple, il réſulte des recherches ci-deſſus, que la différentielle de l'attraction eſt de cette forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}} \log. \left(\frac{1+t}{1-t}\right)$, où, à cauſe de $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$, on peut mettre $\log. \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Or ſi on ſuppo-

ſoit $\frac{\sqrt{u}+1}{\sqrt{u}-1} = A\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$, & qu'en même-temps $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(A+Bu+Cuu)}} + \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$ fût intégrable, on feroit diſparoître de la ſomme des deux différentielles la quantité logarithmique $\log.\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$, parce que $\log.\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + \log. A\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) = \log. A$. Il en ſeroit de même ſi $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(A+Bu+Cuu)}} + \frac{Ddx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$ étoit intégrable, & que $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ fût égale à $\left(\frac{\sqrt{u}+1}{\sqrt{u}-1}\right)^{\frac{1}{n}}$. J'invite les Mathématiciens à ſuivre cette idée, & à en tirer meilleur parti, s'il eſt poſſible. Je prévois néanmoins que cette recherche pourra renfermer d'aſſez grandes difficultés, ſur-tout dans les cas où la quantité $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ devient de réelle imaginaire, c'eſt-à-dire, où $\log.\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$ repréſente ſucceſſivement des logarithmes & des arcs de cercle.

135. Si un ſphéroïde n'eſt pas de révolution, & que le rayon r, près du pole, ſoit exprimé par une fonction de l'angle z, & de l'angle q, que font les méridiens avec un méridien fixe, on aura pour l'attraction au pole ou à l'extrémité de l'axe $r\,dz\,dq$ ſin. z coſ. z, ou $dq\,dz$ ſin. z coſ. $z\varphi$ (coſ. z, coſ. q); d'où il eſt aiſé

de voir que ſi la fonction donnée eſt une fonction rationnelle & ſans diviſeur, la difficulté de la premiere intégration ſe réduira à l'intégration des fractions rationnelles, quand même la fonction contiendroit ſin. ζ, ou ſin. q. Ainſi on pourra d'abord intégrer ou par rapport à ζ, ou par rapport à q, en regardant l'autre angle comme conſtant, & plus naturellement l'angle q. Mais dans la ſeconde intégration par rapport à q ou par rapport à ζ, on trouvera de nouvelles difficultés, ſemblables à celles qui nous ont arrêtés juſqu'ici dans la recherche de l'attraction des ſphéroïdes elliptiques, ou même plus grandes encore. Cependant la fonction pourroit être telle que le tout s'intégreroit par logarithmes réels ou imaginaires. Par exemple, ſi on avoit $\phi(\text{cof. } \zeta, \text{ cof. } q) = \Psi \text{ cof. } \zeta \times \Delta \text{ cof. } q$, Ψ & Δ étant des fonctions rationnelles, dans leſquelles mêmes on pourroit ſuppoſer qu'il y eût des ſin. ζ & des ſin. q, il eſt viſible que l'intégration ſe réduiroit à celle de $QZ\,dq\,d\zeta$, ou $\int Q\,dq \times \int Z\,d\zeta$, Q & Z étant des fonctions rationnelles, & ainſi du reſte.

136. Au lieu d'exprimer les rayons r en entier, par des fonctions de l'angle ζ, on pourroit prendre ſimplement l'excès α du rayon r, ſur le rayon correſpondant d'une ſphere, & on auroit pour l'attraction dans le ſens de l'axe $\alpha\,dp$ ſin. p cof. $p\,dq$, & pour l'attraction perpendiculaire à celle-là, $\alpha\,dp$ ſin. $p^2\,dq$ cof. q.

137. On peut remarquer en paſſant que, ſi on prenoit cette derniere attraction dans le ſens de chaque

méridien, en faiſant abſtraction du facteur cof. q & de α, on auroit dp ſin. $p^2 dq$, laquelle attraction doit être évidemment $= 0$, puiſque les deux parties du méridien de chaque côté de l'axe ſont égales & ſemblables. Cependant ſi on intégroit à l'ordinaire cette quantité, en faiſant pour l'intégrale totale $p = 180$, & $q = 360$, ou $q = 180$, & $p = 360$, elle ne ſeroit pas $= 0$, comme il eſt aiſé de le voir, ce qui prouve combien il eſt néceſſaire d'avoir égard au facteur cof. q, & de décompoſer, par rapport à un plan fixe, l'attraction dont il s'agit.

138. Comme les différentielles des pag. 181 & 184 du Tom. VI de nos *Opuſcules*, donnent également l'attraction du ſphéroïde, & que celle de la pag. 181 peut même avoir deux formes différentes, ſelon que les ſections elliptiques ſont perpendiculaires au plan de c & de b, ou à celui de g & de a; qu'enfin quelques-unes de ces différentielles (principalement dans certains cas) ſont bien plus aiſément intégrables que les autres, il ne ſera pas inutile de montrer ici comment on peut les transformer l'une dans l'autre.

139. Pour cela, ſoit comme dans le Tom. VI, *Opuſc.* pag. 183, $AO = 2c$, $AS = r$, (Fig. 13) un rayon quelconque de l'ellipſoïde, partant du point A, AkO l'ellipſe dont le demi-axe CK, conjugué à c, eſt $= b$, AtO l'ellipſe dont le demi-axe conjugué CR à c, eſt $= a$, & dont le plan eſt perpendiculaire à AkO; ſoit auſſi l'angle $ASG = x$, l'angle SGt ou $SGr = u$ (en

imaginant un plan Gkr parallèle à l'ellipſe dont les axes ſont $2a$ & $2b$), ſoient menées enſuite les lignes si & st perpendiculaires à Gk & à Gr, & joignant Ai, At, ſoient nommés l'angle SAi, ζ, l'angle iAG, k, l'angle SAt, t, & l'angle tAG, s, nous aurons pour l'attraction du point s ſuivant AS, les trois différentes expreſſions $dudy$ ſin. $y \times r$, $dkd\zeta$ cof. $\zeta \times r$, $dsdt$ cof. $t \times r$, & nous allons montrer comment ces différentes expreſſions peuvent ſe changer l'une dans l'autre.

140. Nous remarquerons d'abord que $AG = r$ cof. y, & que de plus $Ai = r$ cof. ζ, & $AG = Ai$ cof. k, d'où $AG = r$ cof. ζ cof. k, & cof. $y =$ cof. ζ cof. k; on aura de même AG ou cof. $y \times r = At \times$ cof. $s =$ r cof. t cof. s, d'où cof. $y =$ cof. ζ cof. $k =$ cof. t cof. s. De plus, $GS = r$ ſin. y, $is = GS$ cof. $u = r$ ſin. y cof. u, & comme $is = r$ ſin. ζ, on aura ſin. y cof. $u =$ ſin. ζ. Enfin, $Gi = At$ ſin. $k = r$ cof. ζ ſin. k, or $Gi =$ $GS \times$ ſin. $u = r$ ſin. y ſin. u, donc ſin. y ſin. $u =$ cof. ζ ſin. k. On trouvera de même $Gt = At$ ſin. $s = r$ cof. t ſin. $s = GS$ cof. $u = r$ ſin. y cof. u, d'où ſin. y cof. $u =$ cof. t ſin. s; & enfin, Gi ou r ſin. y ſin. $u = ts =$ r ſin. t.

141. On a donc toutes ces équations,

1. cof. $y =$ cof. ζ cof. k,
2. cof. $y =$ cof. t cof. s,
3. ſin. y cof. $u =$ ſin. ζ,
4. ſin. y ſin. $u =$ cof. ζ ſin. k,

5. $\sin. y \sin. u = \sin. t$,

6. $\sin. y \cos. u = \cos. t \sin. s$.

142. On tire de la troiſiéme & de la quatriéme équation (en diviſant celle-ci par celle-là), $\frac{\sin. u}{\cos. u}$, ou $\tang. u = \frac{\cos. \zeta \sin. k}{\sin. \zeta}$; on a de plus $\cos. y = \cos. \zeta \cos. k$; & par ce moyen on transformera l'une dans l'autre les différentielles $du\,dy \sin. y$, & $dk\,d\zeta \cos. \zeta$, de la maniere ſuivante.

143. Soit $du = A\,d\zeta + B\,dk$, $dy \sin. y$, ou $-d(\cos. y) = C\,d\zeta + D\,dk$, on trouvera aiſément par la méthode que M. de la Grange a donnée dans le Vol. de Berlin, 1773, pag. 126, $du\,dy \sin. y = (AD - BC)\,d\zeta\,dk$; or puiſque $\cos. y = \cos. \zeta \cos. k$, on aura $dy \sin. y = d\zeta \sin. \zeta \cos. k + dk \sin. k \cos. \zeta$, donc $C = \sin. \zeta \cos. k$, & $D = \sin. k \cos. \zeta$. De plus, puiſque $\tang. u = \frac{\cos. \zeta \sin. k}{\sin. \zeta}$, on aura du ou $\frac{d \tang. u}{1 + \tang.^2 u} =$

$$\left(\frac{-d\zeta \sin. k + dk \cos. k \sin. \zeta \cos. \zeta}{\sin. \zeta^2}\right) \times \frac{1}{1 + \frac{\cos. \zeta^2 \sin. k^2}{\sin. \zeta^2}} =$$

$$\frac{-d\zeta \sin. k + dk \cos. k \sin. \zeta \cos. \zeta}{\sin. \zeta^2 + \cos. \zeta^2 \sin. k^2};$$ d'où l'on tire $A = -\frac{\sin. k}{\sin. \zeta^2 + \cos. \zeta^2 \sin. k^2}$; & $B = \frac{\cos. k \cos. \zeta \sin. \zeta}{\sin. \zeta^2 + \cos. \zeta^2 \sin. k^2}$, donc

$$AD - BC = \frac{-\sin. k^2 \cos. \zeta - \sin. \zeta^2 \cos. \zeta \cos. k^2}{\sin. \zeta^2 + \cos. \zeta^2 \sin. k^2},$$ qui ſe réduit à $-\cos. \zeta$, en mettant dans le numérateur $1 - \sin. k^2$

ſin. k^2 au lieu de cof. k^2, & $1 -$ cof. ζ^2 au lieu de ſin. ζ^2. Ainſi la différentielle $dudy$ ſin. y ſe transforme en $dk\,d\zeta$ cof. ζ.

144. Il eſt facile de voir qu'on changera $dudy$ ſin. y en $dsdt$ cof. t par une méthode ſemblable ; & on transformeroit de même $dkd\zeta$ cof. ζ en $dsdt$ cof. t, par le moyen des équations cof. ζ cof. $k =$ cof. t cof. s, ſin. $\zeta =$ cof. t ſin. s, & ſin. $t =$ cof. ζ ſin. k, tirées des ſix équations de l'arc. Car ces équations donneront ſin. $\zeta =$ cof. t ſin. s, & $\frac{\text{cof. } \zeta \text{ ſin. } k}{\text{cof. } \zeta \text{ cof. } k}$, ou tang. $k = \frac{\text{ſin. } t}{\text{cof. } t \text{ cof. } s} = \frac{\text{tang. } t}{\text{cof. } s}$, & ſi on vouloit avoir les équations de t & s en k & en ζ, on auroit ſin. $t =$ cof. ζ ſin. k, & $\frac{\text{ſin. } s \text{ cof. } t}{\text{cof. } t \text{ cof. } s}$, ou tang. $s = \frac{\text{ſin. } \zeta}{\text{cof. } \zeta \text{ cof. } k} = \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{cof. } k}$.

145. Au lieu de prendre cof. $y =$ cof. ζ cof. k, & tang. $u = \frac{\text{cof. } \zeta \text{ ſin. } k}{\text{ſin. } \zeta}$, on pourroit peut-être imaginer d'autres équations entre u, y, ζ & k, qui transformeroient la différentielle de la pag. 183 du Tom. VI de nos *Opuſcules*, en une différentielle $Qd\zeta dk$ plus aiſément intégrable. C'eſt un objet de recherche, qui peut être intéreſſant pour les Géomètres, & que j'abandonne à ceux qui croiront pouvoir tirer parti de cette idée pour trouver l'attraction d'un ſphéroide elliptique.

146. J'avois imaginé d'intégrer d'abord la formule

de la page 183 du Tome VI de nos *Opuſcules* en faiſant varier u, & enſuite y, & j'avois cru trouver un réſultat qui me conduiſoit à une formule algébrique d'attraction pour les ſphéroïdes elliptiques. Comme cette méthode pourroit en tromper d'autres, il ne ſera peut-être pas inutile de la détailler ici.

147. La differentielle de la page 183, $\frac{du\,\int dy \sin y \cos y^2}{c\left[1+\left(\frac{ff}{cc}-1\right)\cos y^2\right]}$, peut être miſe ſous cette forme $\frac{c\,du\,dy \sin y \cos y^2}{\frac{cc}{ff}+1-\frac{cc}{ff}\cos y^2}$, ou, en mettant pour $\frac{1}{f^2}$ ſa valeur $\frac{aa+(bb-aa)\cos u^2}{aabb}$,

$$\frac{c\,du\,dy \sin y \cos y^2\,(a^2b^2}{[ccaa+(ccbb-ccaa)\cos u^2]\sin y^2+a^2b^2},$$

dans laquelle on peut négliger le coefficient conſtant $c.a^2b^2$.

148. Intégrons maintenant par u, en faiſant y conſtant, & nous aurons d'abord à intégrer $\frac{du}{a^2b^2+[ccaa+(ccbb-ccaa)\cos u^2]\sin y^2}$, ou en faiſant t = à la tangente de u,

$$\frac{dt}{1+tt\left[a^2b^2+\left(ccaa+\frac{(ccbb-ccaa)}{1+tt}\right)\right]\sin y^2} =$$

$$\frac{dt}{a^2b^2(1+tt)+ccaa(1+tt)\sin y^2+(ccbb-ccaa)\sin y^2} =$$

$$\frac{dt}{a^2b^2+a^2b^2tt+ccaatt\sin y^2} =$$

$$\frac{dt}{(a^4b^4+c^4b^4\sin.y^4)\left(1+\frac{a^2b^2t^2+c^2a^2\sin.y^2}{a^4b^4+c^4b^4\sin.y^4}\right)} =$$

$$\frac{1}{a^4b^4+c^4b^4\sin.y^4}\times\frac{\sqrt{(a^4b^4+c^4b^4\sin.y^4)}}{\sqrt{(a^4b^4+c^4a^4\sin.y^4)}}\times\frac{du}{1+uu}, \text{ en faiſant } u=\frac{t\sqrt{(a^4b^4+c^4a^4\sin.y^4)}}{\sqrt{(a^4b^4+c^4b^4\sin.y^4)}},$$

149. Donc l'intégrale eſt

$$\frac{1}{\sqrt{(a^4b^4+c^4b^4\sin.y^4)}\times\sqrt{(a^4b^4+c^4a^4\sin.y^4)}},$$ multiplié par l'angle dont la tangente eſt u; or cet angle a pour tangente $\frac{t\sqrt{(a^4b^4+c^4a^4\sin.y^4)}}{\sqrt{(a^4b^4+c^4b^4\sin.y^4)}}$; donc lorſque $t=0$, ou ∞, c'eſt-à-dire, lorſque $u=0$, ou 90°, ou 180°, on a également $u=0$, ou 90°, ou 180°.

150. Donc, comme on peut également prendre $u=90^\circ$ en quadruplant l'intégrale par y, & en prenant cette intégrale depuis $y=0$ juſqu'à $y=180$, ou prendre $u=180$, & doubler l'intégrale par y, la difficulté ſe réduira à intégrer $90^\circ\times 4\times$

$$\frac{dy\sin.y\cos.y^4}{\sqrt{(a^4b^4+c^4b^4\sin.y^4)}.\sqrt{(a^4b^4+c^4a^4\sin.y^4)}},$$ qui ſe réduit, en faiſant $\cos.y=t'$, à $\frac{dt'\times 90^\circ\times 4}{\sqrt{(A+Bt'+Ct'^4)}}$; c'eſt-à-dire, à des arcs de ſections coniques.

151. Mais cette méthode donne un faux réſultat, parce qu'on y traite tacitement le coefficient de t en y comme conſtant. On le verra clairement en faiſant

z; non pas $= 0$, ni ∞, mais, par exemple, $= 1$, ou en général $= a'$. Soit Y le coefficient de t ou de a' dans la valeur de u, il eſt aiſé de voir que Y doit entrer dans l'intégrale de la quantité dont le numérateur eſt dy ſin. y coſ y. Cependant on ne l'y fait pas entrer dans la ſolution précédente, & c'eſt en cela que cette ſolution eſt fautive. L'erreur tient à ce qu'en faiſant $z = 0$, ou ∞, le coefficient de t en y, dans la valeur de u, diſparoît, & empêche de voir pour un moment qu'il n'en eſt pas de même dans les autres valeurs de u.

152. Nous allons préſentement donner quelques théorêmes ſur l'attraction des ſphéroïdes, qui ne ſont pas elliptiques; nous ſuppoſerons d'abord, comme dans les Tomes II & III de nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, que ce ſoient des ſolides de révolution, & que le rayon r de la courbe ovale génératrice ſoit exprimé par $1 + \alpha\phi A$, α étant une très-petite quantité, & A l'angle pris depuis l'axe de révolution, & compris entre le rayon vecteur r, & cet axe, le centre des rayons r étant le ſommet de cet angle, & placé dans un point de l'axe qui ſoit à-peu-près le milieu.

153. Obſervons d'abord que la fonction ϕA doit être telle, qu'elle ne devienne jamais infinie ni imaginaire, tant que A n'eſt pas $> 180^\circ$. Mais il n'eſt pas abſolument néceſſaire que ϕA demeure la même en ſuppoſant A négatif, car le ſphéroïde étant formé par la rotation *entiere* d'une courbe, ou plutôt d'une *demi*-

courbe autour de ſon axe, il peut ſe faire que les deux parties ſemblables & égales de cette courbe, placées à droite & à gauche de l'axe, ne ſoient point unies par la loi de continuité; c'eſt ce qu'on verra ſur-tout évidemment, s'il s'agit de trouver l'attraction à l'extrémité de l'axe de rotation, puiſqu'alors il ſuffira de chercher l'attraction de la demi-courbe, & de la multiplier par 360°. Et ſi on cherche dans ce même ſphéroïde l'attraction en un point quelconque du méridien, alors ſi φA change de valeur en faiſant A négatif, il faudra ſeulement avoir égard dans les calculs à cette circonſtance, & prendre l'intégrale en ne conſidérant φA que comme une quantité qui eſt toujours la même des deux côtés de l'axe de révolution. Ceci s'éclaircira par la ſuite encore davantage, & ſera même rendu encore plus général.

154. Ainſi φA pourroit être ſuppoſé tel que non-ſeulement il changeât de ſigne en faiſant A négatif, mais même qu'il devînt imaginaire; parce qu'on n'a égard ici qu'à la courbe qui s'étend depuis $A = 0$ juſqu'à $A = 180°$, & qui eſt ſuppoſée la courbe génératrice du ſphéroïde.

155. On pourroit même ſuppoſer ſans inconvénient que φA changeât de valeur, ou même devînt imaginaire dans l'étendue des 180 degrés que nous donnons à l'angle A; mais alors, pour avoir φA toujours réelle, il faudroit regarder la courbe génératrice, comme compoſée de deux portions différentes, qui ne ſeroient point

unies par la loi de continuité, dans l'étendue même des 180° dont il s'agit; & on auroit égard à cette circonſtance dans les calculs, par exemple, ſi φA contenoit un terme de cette forme, cof. A, il faudroit, lorſque A eſt $> 90°$, mettre cof. $180 - A$ au lieu de cof. A; mais alors, comme nous le verrons plus bas, il ſeroit bon d'employer une méthode particuliere pour trouver l'attraction du ſphéroïde méthode qui peut même s'étendre au cas ou φA ne ſeroit exprimé par aucune fonction algébrique ni tranſcendante, mais ſeroit une quantité irréguliere quelconque, qui n'auroit d'autre propriété que d'être la même pour le même A, & de ne point donner d'angles finis dans la courbe génératrice.

156. Peut être même ne faudroit-il pas exclure de la fonction φA des quantités telles que f cof. $A^{b\sqrt{-1}}$, f & b étant conſtans; car cette quantité cof. $A^{b\sqrt{-1}}$ eſt, comme l'on ſait, $= fA' + fB'\sqrt{-1}$, B' & A' étant des quantités réelles, ſavoir, B' le ſinus, & A' le coſinus d'un angle dont le rayon eſt cof. A, & dont la valeur eſt b log. cof. A. Or il pourroit peut-être y avoir d'autres termes qui détruiſiſſent celui-là quant à la partie imaginaire.

157. Si φA renferme une fraction, alors il faudra que le dénominateur de cette fraction ſoit tel que jamais il ne devienne $= 0$, car autrement r deviendroit infini, & nous ſuppoſons ici que $\alpha\varphi A$ eſt une quantité

très-petite. Il ne faut pas même que $\alpha \varphi A$ puiſſe jamais devenir fort grande, d'où il s'enſuit que le dénominateur de φA, quand il y en a un, ne doit pas être une quantité très-petite.

158. Par conſéquent, ſi le dénominateur de φA eſt ſuppoſé, par exemple, $\alpha + \zeta$ cof. $A + \gamma$ cof $A^2 + \delta$ cof. $A^3 + \epsilon$ cof. A^4 &c. comme l'on ſait que ce dénominateur peut ſe diviſer en facteurs trinomes & réels de la forme $\alpha' + \zeta'$ cof. $A + \gamma'$ cof. A^2, il faut que chacun de ces facteurs ne deviennent jamais ni zero, ni très-petit, tant que cof. A ſera réel, c'eſt-à-dire, tant que cof. A ſera entre $+1$ & -1. Donc ſi on fait $\alpha' + \zeta'$ cof. $A + \gamma'$ cof. $A^2 = 0$, il faut que la valeur de cof. A qui en réſultera, ſoit imaginaire ou beaucoup plus grande que l'unité, ſoit poſitive, ſoit négative.

159 Par conſéquent, ſi φA eſt une fraction, on ne repréſenteroit pas ſa valeur d'une maniere exacte en réduiſant cette fraction en ſérie, ſur-tout ſi dans le développement de cette ſérie, il ſe trouvoit des puiſſances négatives de cof. A, ou de ſin. A, car ces puiſſances négatives donneroient $\varphi A = \infty$ lorſque cof. A ou ſin. A ſeroient $= 0$, c'eſt-à-dire, lorſque A ſeroit $= 90°$, ou 0, ou $180°$, & donneroit alors r infinie, ce qui eſt contre l'hypothèſe faite ici, que r differe peu de l'unité.

160. Il eſt clair encore, 1°. que, lorſque $A = 0$ & $A = 180°$, $\frac{dr}{dA}$ doit être $= 0$, pour que le ſphéroide

puiſſe être ſuppoſé repréſenter la figure de la terre ; autrement la direction de la peſanteur, qui doit toujours être perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde, ſeroit très différente le long de l'axe & dans les points infiniment proches de l'axe (Voyez Tom. VI, *Opuſc.* pag. 344, art. 19) 2°. On voit auſſi que la courbe génératrice du ſphéroïde doit être une courbe ovale & rentrante, ce qui exclut toute valeur de φA, qui donneroit un point de rebrouſſement en quelqu'endroit de la courbe génératrice. Ainſi ces deux conditions excluent déja une infinité de valeurs de φA, par exemple, celles où φA ſeroit $=$ ſin. A^m lorſque A eſt eſt infiniment petit, m étant < 1.

161. Quelle que ſoit la valeur de φA, algébrique ou tranſcendante, & quelque forme qu'on lui ſuppoſe, (laquelle valeur doit ici être $= 0$ lorſque $A = 0$, puiſque la premiere valeur de r eſt ſuppoſée $= 1$), on peut toujours, comme l'on ſait, exprimer φA d'une maniere très-exacte, en développant cette valeur par les méthodes ordinaires, lorſque A eſt infiniment petit, par une ſuite de puiſſances de ſin. A, ou même de A, qui ne differe point alors de ſin. A, & celle de ces puiſſances, ſin. A^m, dont l'expoſant eſt le moindre, donne, comme l'on ſait encore, la vraie valeur de r, les autres puiſſances devant être négligées ; or ſi cette puiſſance eſt telle que m ſoit au-deſſous de l'unité, le ſphéroïde ne peut être en équilibre, puiſqu'il eſt clair que $\frac{dr}{dA}$ ne

ſeroit

ſeroit pas $=0$, lorſque $A=0$, mais infini. Donc φA ne ſauroit être tel, qu'en le développant en ſérie, le premier terme ſin. A^m ait un expoſant fractionnaire >1. A plus forte raiſon, m ne peut il être négatif, ce qui d'ailleurs, en faiſant $A=0$, donneroit $\varphi A=\infty$, & non pas $=0$, comme il le doit être alors.

162. Par la même raiſon, ſi on fait $A=180°$, il faudra que la valeur de $\frac{dr}{dz}$ ſoit $=0$ pour cette valeur de A. Et en général toutes les valeurs de φA qui ne donneront pas $d\varphi A=0$ lorſque A ſera $=0$, ou $180°$, devront être rejettées.

163. Pour qu'il n'y ait pas, dans la courbe génératrice, de point d'inflexion, il faut que les ouvertures des angles des petits côtés de la courbe ſoient toutes tournées vers le centre des rayons r, qu'on ſuppoſe placé au-dedans de la courbe; donc les perpendiculaires à la courbe doivent être convergentes au-dedans de la courbe, d'où il eſt aiſé de voir que la ſomme des deux angles $\frac{dr}{rdA}+dA$ doit être plus grande que l'angle ſuivant $\frac{dr+ddr}{rdA+drdA}$; & que par conſéquent $\frac{dr+ddr}{rdA+drdA}-\frac{dr}{rdA}$ doit être $<dA$; donc $\frac{ddr}{rdA}-\frac{dr^2}{r^2dA}$ doit être $<dA$. Or c'eſt en effet ce qui a lieu (α étant ſuppoſé très-petit) tant que $d(\varphi A)$ & $dd\varphi A$ n'eſt pas $=\infty$. Donc φA doit être tel, que $d\varphi A$

& $dd\varphi A$ ne ſoit nulle part $= \infty$, quelque valeur qu'on donne à A, depuis o juſqu'à 180 degrés; la choſe eſt aſſez claire par elle-même pour $d\varphi A$, puiſque ſi $d\varphi A$ étoit quelque part infinie, $\frac{dr}{d\varphi}$ ſeroit infini, ce qui ne ſe peut, la courbe étant ſuppoſée ovale, rentrante, & peu différente du cercle, mais on voit de plus ici que $dd\varphi A$ doit auſſi avoir la même propriété.

164. Par exemple, ſi la valeur de φA, en ſuppoſant A infiniment petit (ou $= 180^\circ$ à un infiniment petit près), eſt fin. A^m, ou A^n, m étant < 2, il eſt clair que ddr ou $dd\varphi A$ ſera $= \infty$ lorſque $A = o$, ou 180°, & qu'ainſi φA ne peut avoir une telle valeur. C'eſt ce que nous prouverons auſſi plus bas d'une autre maniere.

165. La courbe génératrice du ſphéroïde devant être concave dans toute ſon étendue, on peut ſuppoſer l'origine des r placée de telle ſorte, que, lorſque $A = 90^\circ$, on ait $dr = o$; il ſuffira pour cela que cof. A ſe trouve par tout à une puiſſance poſitive dans la différentielle de φA.

166. Or ſi dans cette hypothèſe la valeur de φA eſt telle, qu'en faiſant $A' = 180^\circ - A$ la valeur de $\varphi(180^\circ - A)$ ſoit conſtamment plus grande ou plus petite que φA, il eſt aiſé de voir que le point qui répond à $A = 90^\circ$, ſera tiré parallélement à l'axe avec plus de force d'un côté de l'équateur que de l'autre, (j'appelle ici *equateur* le plan paſſant par le centre des r, & perpendiculaire à l'axe), par conſéquent l'attrac-

tion en ce point ne ſera pas perpendiculaire au ſphéroïde, comme elle le doit être à cauſe de $dr = 0$ (*hyp.*) lorſque $A = 90^{\circ}$, & l'équilibre ſeroit impoſſible.

167. Ainſi, ſi on avoit, par exemple, $\phi A = E + B \text{ cof. } A + C \text{ cof. } A^2 + D \text{ cof. } A^3$ &c. B, C, D, &c. étant tous de même ſigne, (& de plus E étant $= -B - C - D$, afin que $r = 1$ lorſque $A = 0$), il eſt clair que l'équilibre ſeroit impoſſible, parce que les deux angles A' & A, également éloignés de 90°, donneroient conſtamment r plus grand d'un côté que de l'autre.

168. Il en ſeroit de même ſi faiſant partir du centre les abſciſſes x dans la courbe génératrice, & ſuppoſant dans cette même courbe des ordonnées y parallèles à l'axe, les y étoient conſtamment plus grandes d'un côté que de l'autre; car alors il eſt clair, en faiſant tourner ces y autour de l'axe, que dans chaque poſition une des y exerceroit parallèlement à l'axe une attraction plus forte à l'équateur, que l'autre y; & qu'ainſi l'attraction à l'équateur ne pourroit être perpendiculaire au ſphéroïde, comme elle le doit être pour l'équilibre.

169. En général, ſi dans cette hypothèſe de $\frac{dr}{dA} = 0$ à l'équateur, les deux parties de la courbe génératrice au-deſſus & au-deſſous du plan de l'équateur, ſont égales & ſemblables, & qu'en ſuppoſant toujours $dr = 0$ à l'équateur & aux deux poles, on trace à volonté, ſoit au-deſſus, ſoit au-deſſous du plan de

l'équateur, au lieu de la partie ſupérieure ou inférieure de la courbe génératrice, une autre courbe qui ſoit toute au-dehors ou toute au-dedans de la courbe génératrice, il eſt viſible que l'attraction parallèle à l'axe dans le ſphéroide formé par cette nouvelle courbe, ne ſera pas nulle à l'équateur, & qu'ainſi il ne pourra y avoir d'équilibre.

170. On voit par-là combien il eſt de figures, même ovales & peu différentes d'un cercle, qui ne peuvent former un ſphéroïde, dont les parties ſoient en équilibre.

171. Voyons maintenant ſi nous ne pourrions pas trouver encore de nouvelles conditions pour la valeur de ϕA, & ſervons-nous pour cela de la méthode que nous avons employée dans d'autres occaſions pour examiner d'autres loix de la nature, par exemple, celle du rapport des ſinus de réfraction dans le paſſage des corps ſolides ſphéroïdes d'un milieu réſiſtant dans un autre; cette méthode conſiſte à examiner ce qui arrive lorſqu'on conſidere un état, où la loi qu'on cherche, quelle qu'elle ſoit, commence à ſe manifeſter infiniment peu. L'avantage de cette méthode, qu'on peut employer en bien d'autres cas, conſiſte, en ce que la ſérie qui exprime la loi qu'on cherche, eſt alors très-convergente, parce que ſes termes ſont formés des puiſſances croiſſantes d'une quantité infiniment petite, & qu'on peut même alors négliger tous ſes termes, excepté le premier, ou du moins tous les termes qui contiendroient des

puiſſances plus élevées, que celles dont on a beſoin pour l'objet qu'on ſe propoſe de prouver.

172. Nous allons donc conſidérer ici l'attraction dans un point infiniment proche du pole, parce qu'au pole l'attraction horiſontale n'a pas lieu, que par conſéquent elle commence à ſe manifeſter infiniment près du pole, & qu'il en eſt de même de la *variation* de l'attraction verticale.

173. Soit P le pole du ſphéroide (Fig. 15), l'arc ou angle $PQ = \omega$, l'angle $OQR = q$, & l'arc $QR = p$, il n'eſt pas difficile de voir que cof. PR, ou cof. $A =$ cof. p cof. $\omega -$ ſin. p ſin. ω cof. q, que l'élément de l'attraction perpendiculaire à CQ ſera $\frac{dp \times dq \text{ ſin. } p^2 \text{ cof. } q}{2^{\frac{1}{2}}(1 - \text{cof. } p)^{\frac{1}{2}}} \times$ $\varphi(A)$, & que cette attraction ſeroit nulle au point P, où $\omega = 0$.

174. Suppoſons maintenant que ω ſoit infiniment petit, il eſt aiſé de voir que φA, ou φPR deviendra (en négligeant les quantités infiniment petites du ſecond ordre ſin. ω^2) $\varphi(p, q) +$ ſin. $\omega \Psi(p, q)$, & que l'attraction horiſontale au point Q, c'eſt-à-dire, l'attraction perpendiculaire à CQ, ſera proportionnelle à B ſin ω, B étant une conſtante qui dépend de la valeur de $\Psi(q, p)$ après l'intégration totale.

175. Cette attraction eſt à l'attraction verticale ſuivant QC (qu'on peut ſuppoſer conſtante, parce qu'elle l'eſt à très-peu près), comme C ſin. ω eſt à 1, C étant encore une conſtante.

176. Or il faut pour l'équilibre, que le rapport des deux attractions ſoit $= \frac{a d \varphi A}{dA}$, ou $\frac{a d \varphi r}{dr}$. Donc ſi φA eſt telle, qu'en faiſant A infiniment petit, elle ſe réduiſe à une quantité de cette forme, E ſin. A^m, m étant un nombre fractionnaire quelconque plus grand que l'unité, mais plus petit que 2, (car nous avons déja exclu les cas où m eſt < 1), il eſt impoſſible alors que le rapport des deux attractions ſoit égal à $\frac{a d \varphi r}{dr}$, puiſque ce rapport ſeroit $= Em$ ſin. A^{m-1}, & que ſin. A^{m-1} ne peut être ſuppoſé $=$ ſin. A, m étant (*hyp.*) un nombre < 2.

177. Et ſi dans l'article 174 B étoit $= o$, comme les autres termes négligés dans l'expreſſion de l'attraction horiſontale, ſeroient de la forme H ſin. A^p, p étant $>$ que l'unité, alors, le terme Em ſin. A^{m-1} ne pouvant être détruit par aucun autre, il eſt clair que l'équilibre ſeroit encore impoſſible.

178. Si en faiſant $A = 180°$, le rayon eſt exprimé par $A' + B'$ ſin. a^m comme il le doit être en effet, & que le nombre m ſoit encore plus petit que 2, l'équilibre eſt encore impoſſible, par les mêmes raiſons.

179. Il en ſeroit de même ſi φA étoit telle, qu'en faiſant $A = 90°$, ou cof. $A = o$, & ſuppoſant $dr = o$ lorſque $A = 90°$, la valeur de φA devenoit alors cof. A^m, m étant un nombre plus petit que 2. En effet, quoique la valeur de $a \varphi A$, comptée depuis l'équateur,

ne ſoit pas ſimplement $\alpha\varphi A$, mais $\alpha\varphi A \times \Psi\rho$, ρ étant l'angle variable de chaque vertical avec l'équateur, il eſt néanmoins aiſé de voir que, ſi on prend, à compter de l'équateur, un arc infiniment petit $= \delta s$, comme on l'a pris dans l'art. précédent en partant du pole, l'attraction horiſontale à l'extrémité de cet arc, ſera proportionnelle, comme dans l'art. précédent, à B' ſin. λ, & que le rapport de cette attraction à la peſanteur, ſera C' ſin. λ, C' & B' étant des conſtantes. Or le rapport de dr à $d\lambda$ en ce point eſt évidemment celui de $\alpha d(\text{ſin. } \lambda)^m$ à $d\lambda$, c'eſt-à-dire, αm ſin. λ^{m-1}. Donc, &c.

180. Ce n'eſt pas tout; & l'on peut prouver que la valeur de φA, lorſque A eſt infiniment petit, ne ſauroit être ſin. A^m, m étant une fraction quelconque. En effet, ſi en ſuppoſant A infiniment petit, la valeur de $\alpha\varphi A$ (qui renferme alors, comme l'on ſait, une ſuite de puiſſances de A, ou ſin. A) renferme dans cette ſuite un ſeul terme à expoſant fractionnaire λ ſin. A^m, m étant une fraction, on peut prouver par la même méthode, que l'équilibre eſt impoſſible. Car il y aura néceſſairement dans la valeur de $\frac{dr}{dA}$ un terme λ ſin. A^{m-1} qui aura un expoſant fractionnaire. Or il eſt aiſé de voir, en ſuivant le procédé ci-deſſus, que la valeur de l'attraction horiſontale, lorſque λ eſt infiniment petit, ne peut être compoſée que d'une ſuite de termes A ſin. $\lambda + B$ ſin. $\lambda^2 + C$ ſin. λ^3, &c. où ſin. λ n'eſt

élevé qu'à des puiſſances entieres, & que l'attraction verticale ſera de même $E+F$ ſin. $\lambda+G$ ſin. λ^2, &c. Donc le rapport de ces deux attractions ne renfermera jamais que des puiſſances entieres de ſin. λ. Donc, &c.

181. On verra de même, & par toutes les raiſons expoſées ci-deſſus, que l'équilibre eſt impoſſible, ſi en faiſant A infiniment peu différent de 90°, la valeur du rayon eſt $= 1+B'$ cof. $A'+C'$ cof. A^2, &c. & qu'il y ait un ſeul des expoſans p, q, &c. qui ſoit fractionnaire.

182. On pourroit objecter ici, que dans l'expreſſion de l'attraction horiſontale & verticale, nous n'avons point d'égard à certains termes où il pourroit entrer des puiſſances fractionnaires de ſin. A; par exemple, il eſt certain (Tom. II & III de nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*) que l'attraction verticale doit renfermer un terme de cette forme, $\frac{4\pi}{3}(1+\alpha\varphi\lambda)$, & $\varphi\lambda$ pourroit en ce cas contenir des puiſſances fractionnaires de ſin. λ. Mais il faut obſerver, que dans la comparaiſon ou le rapport de l'attraction horiſontale à la verticale, ces termes renfermeroient le quarré de α ou des puiſſances plus élevées de α; & on peut ſuppoſer α ſi petit, que ſon quarré α^2 & les puiſſances plus élevées ſoient d'un ordre d'infiniment petit, moindre que α ſin. A^m, m étant un nombre entier tel qu'on voudra. Ainſi la démonſtration précédente aura toujours lieu dans ce cas, or il eſt aiſé de conclure delà qu'elle

aura

aura lieu même dans les cas où α ne ſeroit pas auſſi petit qu'on vient de le ſuppoſer. Car ſi l'équilibre étoit poſſible, en ne ſuppoſantt pas α auſſi petit que nous venons de faire, & en donnant à φA une valeur qui renfermât des puiſſances fractionnaires de ſin. A ou coſ. A, il eſt clair que l'équilibre auroit lieu encore en ſuppoſant α ſi petit qu'on voudroit, puiſque α diſparoît dans la comparaiſon du rapport des deux attractions à la quantité $\frac{\alpha d\varphi A}{dA}$, cette quantité α ſe trouvant également dans l'un & dans l'autre. Donc, &c.

183. Donc en général φA ne peut être exprimé que par une ſuite, qui ſoit de cette forme A ſin. $A^2 + B$ ſin. $A^3 + C$ ſin. A^4, &c. lorſque $A = 0$, ou $180°$, & qui ſoit de la forme A' coſ. $A^2 + B'$ coſ. $A^3 + C'$ coſ. A^4, &c. lorſque $A = 90°$.

184. On peut conſidérer de plus que dans le développement de la quantité φ(coſ. p coſ. ϕ — ſin. p ſin. ϕ coſ. q), pour l'expreſſion de l'attraction horiſontale, ſi on met pour coſ. ϕ ſa valeur $1 - \frac{\text{ſin. } \phi^2}{2} - \frac{\text{ſin. } \phi^4}{8}$, &c. tous les termes où coſ. q eſt élevé à une puiſſance paire, doivent s'en aller, parce que ces termes ſeront encore multipliés par $\frac{dq \text{ ſin. } p^2 \text{ coſ. } q}{(1 - \text{coſ. } p)^{\frac{1}{2}}}$, & auront par conſéquent zero pour intégrale, à cauſe de

la puiſſance impaire de cof. q (Voyez Tome V, *Opuſcules*, page 27, article 54), en ſorte qu'il ne reſtera, dans le développement de la fonction dont il s'agit, que les termes où cof. q, & par conſéquent ſin. λ cof. q ſeront élevées à une puiſſance impaire; or, delà il eſt aiſé de conclure qu'il ne doit y avoir dans le développement de $\varphi\lambda$, que des puiſſances paires de ſin. λ, afin que $\frac{d\varphi\lambda}{d\lambda}$, qui doit exprimer le rapport de l'attraction horiſontale à la verticale, ne renferme que des puiſſances impaires. Donc lorſque A eſt infiniment petit, ou infiniment peu différent de 180°, la valeur de φA doit être B ſin. $A^2 + C$ ſin. $A^4 + D$ ſin. A^6, &c. & par la même raiſon encore, on trouvera que la valeur de φA, lorſque $A = 90°$, à très-peu près, ne doit contenir que des quantités de cette forme, b cof. $A^2 +$ c cof. $A^4 + e$ cof. A^6, &c.

185. On peut reconnoître aiſément les cas où la valeur du rayon renfermera, lorſque $A = 0$, ou 90° à peu-près, des ſin. A^m & cof. A^p, dans leſquels m & p ſeront fractionnaires Car il eſt viſible qu'alors il y auroit quelque différentielle de r, ſavoir celle d'un ordre $> m$, qui ſeroit infinie, lorſque $A = 0$, ou 180°. Donc ſi, en différentiant ſucceſſivement r, & faiſant dA conſtant, il ſe trouve une différentielle infinie, lorſque $A = 0$, ou 180°, il eſt clair que l'équilibre eſt impoſſible.

186. Il en ſera de même pour cof. A'; c'eſt-à-dire, que ſi, en faiſant $A = 90°$, on différentie ſucceſſivement r, & qu'il y ait une valeur infinie pour quelqu'une des différentielles $d^n r$ du rayon r, l'équilibre ſera impoſſible.

187. Il faut pourtant remarquer que la valeur de $d^n r$ pourroit encore être infinie, quand même il n'y auroit pas d'expoſans fractionnaires. C'eſt ce qui arrivera, par exemple, en ſuppoſant que φ (ſin. A) renferme, lorſque $A = 0$, ou $180°$, ou $90°$, des puiſſances entieres négatives, de ſin. A, ou cof. A, mais alors dy même & y, ſeroient infinis, ce qui ne ſe peut. Ainſi ce cas ne met aucune reſtriction réelle a la démonſtration précédente.

188. Nous avons conſidéré juſqu'à préſent l'équilibre du fluide, indépendamment de la force centrifuge, & en ſuppoſant le ſphéroide en repos. Si on a préſentement égard à cette force centrifuge, il ſera facile de voir, en revenant ſur les propoſitions précédentes, qu'elles peuvent être encore appliquées à ce cas, & qu'ainſi la fonction φA devra, pour l'équilibre, avoir la forme indiquée dans les articles précédens.

189. Il y aura ſeulement cette différence, que ſi le fluide ne tourne pas autour de ſon axe, & qu'il y ait en ce cas quelque figure propre à l'équilibre, alors (en ſuppoſant α infiniment petit) on pourra donner à α telle valeur infiniment petite qu'on voudra, parce que cette quantité α, comme nous

l'avons vu plus haut (art. 182) diſparoît de l'équation; de ſorte que le ſphéroïde pourra (dans le cas ſuppoſé) avoir une infinité de figures, toutes très-peu différentes d'une ſphere, & toutes propres à l'équilibre, quoique toutes puiſſent être d'ailleurs aſſujetties à la même loi, & ne différer que par la valeur de α. Au lieu que ſi l'on a égard à la force centrifuge, il y aura par la condition de l'équilibre une équation entre f & α. Mais il n'en ſera pas moins vrai qu'on peut ſuppoſer f, & par conſéquent α ſi petits que dans l'équation de l'équilibre, on pourra négliger, comme a fait ci-deſſus, art. 182, les puiſſances de f & de α, d'où l'on conclura, comme dans ce même art. 182, que les théorêmes démontrés, art. 182, pour le cas où $f = 0$, & appliqués ici au cas où f & α ſont ſuppoſés exceſſivement petits, auront lieu lors même que f & α ne ſeront plus d'une exceſſive petiteſſe.

190. La conſidération de la rotation du fluide, & par conſéquent de la force centrifuge, donne lieu de plus à quelques remarques particulieres.

191. Nous venons de prouver (art. 184) que lorſque ſin. A eſt très petit, la puiſſance la moins élevée de ϕA doit être ſin. A^2, ou ſin. A^4, ou, &c. ſuivant les puiſſances paires. On peut obſerver de plus que, ſi le ſphéroïde tourne ſur ſon axe, le terme ſin. A^2 doit néceſſairement s'y trouver. Car il eſt clair que la force centrifuge produiſant dans la force horiſontale un terme de cette forme, R coſ. A ſin. A, il faut néceſſaire-

ment qu'il ſe trouve dans l'expreſſion de φA un terme de la forme ſin. A^2, ou cof. A^2, ſans quoi l'équilibre eſt impoſſible.

192. On prouvera de même, & par les mêmes raiſons, que le terme cof. A^2 doit néceſſairement ſe trouver dans l'expreſſion de φA, lorſque A eſt $=90^\circ$.

193. Dans la théorie précédente ſur la valeur de φA, on évite, comme il a déja été remarqué plus haut (art. 171), les inconvéniens de la méthode des ſuites, dont l'uſage paroit dangereux, lorſque les ſuites peuvent devenir divergentes. Ici on ſuppoſe λ infiniment petit, de ſorte que les ſuites ſont toujours très-convergentes, & peuvent même être ſuppoſées auſſi convergentes qu'on voudra, en prenant λ auſſi petit qu'il ſera néceſſaire pour cet effet.

194. M. de la Place a remarqué dans les Mém. de l'Acad. de 1772, Tom. II, que ſi un ſphéroïde, très-peu différent d'une ſphere, a la figure néceſſaire pour être en équilibre, il y ſera encore en y ajoutant les termes a cof. $A^2 + b$ cof. $A + c$, c'eſt une ſuite évidente de notre théorie générale ſur ce même objet, Tom. V de nos *Opuſcules*. Car nous avons fait voir, page 24 de ce Tome V, que l'addition du terme b cof. A ne changeoit pas la figure du ſphéroïde; il en eſt de même du terme c, qui ne change rien à l'attraction horiſontale, & quant au terme a cof. A^2, il ſera évidemment détruit en donnant à la force centrifuge une valeur

convenable; comme nous l'avons auſſi fait voir dans l'endroit cité.

195. Si au lieu de prendre pour indéterminées dans l'expreſſion de la valeur de l'attraction, les angles OQR & RCQ, comme on a fait, art. 173, on eût pris les angles RCP & OPR, & qu'on eût fait $PR = \zeta$, & l'angle QPR, ν, on auroit trouvé l'élément de l'attraction horiſontale $= \alpha\, d\zeta\, \varphi\zeta \times d\nu$ ſin. $\zeta \times \frac{RM}{QR^2}$ (a); & celui de l'attraction verticale $\alpha\, d\zeta\, \varphi\zeta \times d\nu$ ſin. $\zeta \times \frac{QM}{QR^2}$. Or il eſt aiſé de voir que CM ou le coſinus de l'angle RCM eſt coſ. ζ coſ. δ + ſin. ζ ſin. δ coſ. ν, on a de plus $QR = \sqrt{(2.QM)} = \sqrt{[2(1 - CM)]}$, & RM où le ſinus de l'angle RCM, eſt égal, comme il eſt encore aiſé de le voir, à ſin. ζ coſ. $\nu \times$ coſ. δ — coſ. ζ ſin. δ; il faudra de plus, comme nous l'avons remarqué dans nos *Recherches ſur le Syſtéme du Monde*, Tom. II, pag. 276 & 277, & Tom. III, pag. 198 & 220, ajouter à la quantité ci-deſſus, déja trouvée pour l'attraction verticale, la quantité $\frac{4\pi}{3}(1 + \alpha\varphi\delta)$, qui exprime l'attraction de la ſphere dont le rayon eſt CQ, 2π étant le rapport de la circonférence au rayon, & en retrancher la quantité $2\pi \times \alpha\varphi\delta$, égale à l'intégrale de $\alpha\varphi\delta \times \frac{-d(\text{coſ } QR)}{2^{\frac{1}{2}}(1 - \text{coſ } QR)^{\frac{1}{2}}}$, multipliée par 360°; mainte-

(a) On prend ici RM pour ſa projection ſur le plan PCQ.

tenant ſi on différentie la quantité $\frac{\alpha d\zeta \varphi\zeta \times d\omega \sin \zeta}{(1-\cos\zeta\cos\lambda-\sin\zeta\sin\lambda\cos\omega)^{\frac{1}{2}}}$, en ne faiſant varier que λ, & qu'on diviſe cette différence par $d\lambda$, on trouvera préciſément la moitié de l'attraction horiſontale, comme il eſt aiſé de le voir. De-là on tire par un calcul fort ſimple les théorêmes de M. de la Place, que cet Académicien a démontrés par une ſavante analyſe dans le ſecond Volume des Mém. de 1772, page 545 & ſuiv.

196. Si au lieu de $\varphi\zeta$, on avoit $\varphi(\zeta,\omega)$, alors le ſphéroïde ne ſeroit pas un ſolide de révolution, & il faudroit (Tom. VI de nos *Opuſc.* pag. 162 & ſuiv.) avoir égard, pour l'équilibre, à l'attraction perpendiculaire au plan $OQPC$, qui n'eſt pas alors la même des deux côtés du plan. Or l'attraction perpendiculaire au plan $OQPC$ ſera $\alpha d\zeta\varphi\zeta\times d\omega \sin.\zeta\times\frac{\sin.\zeta\sin.\omega}{QR^{\frac{1}{2}}}$, & ſi on ſuppoſe un méridien qui faſſe avec le méridien PQO un angle infiniment petit $d\omega$, il faudra pour l'équilibre, comme on le peut voir aiſément, que cette attraction ſoit à l'attraction verticale $\frac{4\pi}{3}$ comme $d\omega\times\frac{\alpha d\varphi(\zeta,\omega)}{d\omega}$ eſt à $\lambda\omega\times\sin.\lambda$; d'où l'on voit que l'attraction dont il s'agit, multipliée par $\sin.\lambda$ doit être $=\frac{4\pi}{3}\times\frac{d\varphi(\zeta,\omega)}{d\omega}$. Or ſi on différentie l'attraction verti-

cale en faiſant ſeulement varier l'angle Λ de la quantité infiniment petite $d\omega$, & en diviſant par $d\Lambda$, on trouvera une quantité égale à la moitié de l'attraction perpendiculaire au plan $OQPC$, comme il eſt très-facile de le voir. Delà on peut tirer aiſément pour les ſphéroïdes qui ne ſont pas de révolution, de nouveaux théorêmes, analogues à ceux des Mém. de 1772, déja cités. On verra, par exemple, que ſi le ſphéroïde eſt en équilibre, & que l'angle Λ demeure conſtant pendant que l'angle ν varie, l'attraction verticale ou la peſanteur ſera la même, & qu'à différentes latitudes, la longitude reſtant la même ou non, la différence de la peſanteur, à compter de l'équateur ou du pole, ſera comme le quarré du ſinus, ou du coſinus de latitude.

197. De plus, comme la nature des fonctions $\varphi\zeta$, & $\varphi(\zeta, \nu)$ n'entre en aucune maniere dans les opérations que nous venons de faire pour la différentiation de l'attraction verticale, il eſt aiſé de voir que ces théorêmes auront lieu quand même $\varphi\zeta$ & $\varphi(\zeta, \nu)$ ne ſeroient pas des fonctions analytiques, mais des quantités quelconques irrégulieres, qui demeuraſſent ſeulement les mêmes, quand ζ & ν demeureroient les mêmes.

198. De ces théorêmes il réſulte évidemment que le double de la différence de peſanteur à l'extrémité de deux rayons quelconques, multiplés par le rayon 1, eſt égal, ſoit qu'il y ait équilibre ou non, à la ſomme des forces tangentielles qui agiſſent ſur l'arc compris entre ces rayons.

199.

199. Or on ſait par la théorie de l'Hydroſtatique, que la ſomme de ces forces eſt égale à la différence de poids des deux rayons, ſoit qu'il y ait équilibre ou non.

200. Donc le double de la différence de peſanteur à l'extrêmité de deux rayons quelconques, multiplié par le rayon 1 (qui eſt le demi-axe), eſt égal, ſoit qu'il y ait équilibre ou non, à la différence de poids total des deux rayons.

201. Dans ces théorêmes, comme nous ſuppoſons que le fluide peut n'être pas en équilibre, & que par conſéquent il peut être en mouvement, nous n'avons d'égard qu'aux forces (verticale ou horiſontale) qui viennent de l'attraction des parties, & nous faiſons abſtraction de celles qui pourroient venir du mouvement de ces mêmes parties.

202. On peut trouver facilement ce que la conſidération de la force centrifuge doit ajouter de modification à ce théorême, ainſi on verra que le double de la différence des poids $-- f \sin. A^2$ eſt égal à la ſomme des forces tangentielles, c'eſt-à-dire, à la différence de poids des deux rayons. Car ſoit qu'il y ait équilibre ou non, ſoit que le fluide tourne ou ne tourne pas autour de ſon axe, la ſomme des forces tangentielles réſultantes de l'attraction & de la force centrifuge, eſt toujours égale, comme l'on ſait, à la différence de poids des rayons, réſultante auſſi de l'attraction & de la force centrifuge.

203 On peut obſerver ici que la méthode de l'article 194 eſt bien moins commode, & ſur-tout moins facile que celle de l'article 173, pour trouver l'attraction du ſphéroide, mais qu'en même-temps cette méthode de l'art 194 donne avec une extrême facilité les théorêmes qui viennent d'être démontrés, au lieu que les autres méthodes, & en particulier celle de l'art 173, ne donneroient ces mêmes théorêmes que par des calculs aſſez compliqués. D où l'on voit combien il eſt utile d'employer & d'eſſayer dans cette théorie des méthodes différentes, puiſque ces différentes méthodes ont les unes ſur les autres des avantages réciproques, ſelon ce qu'on ſe propoſe de trouver.

204. On peut auſſi démontrer, en employant la méthode de l'art. 194, les théorêmes donnés ci-deſſus (art. 183 & ſuiv.) ſur les valeurs de φA néceſſaires à l'équilibre, lorſque ſin. A ou cof. A ſont infiniment petits, & le réſultat ſera le même.

205. Cette maniere de démontrer les théorêmes dont il s'agit, auroit même l'avantage de n'exiger aucune opération ſur la quantité ou fonction indéterminée $\varphi(\zeta)$, en ſorte que ces théorêmes ſeront vrais, quelle que ſoit cette fonction. Or on ſait d'ailleurs que ſi cette fonction eſt celle qui convient à un ſphéroide elliptique homogène, ce ſphéroide ſera en équilibre, en ayant égard a la force centrifuge, & on peut prouver aiſément que l'attraction horiſontale dans le ſphéroide dont il s'agit, ſeroit compoſée de termes

B ſin. $A + C$ ſin. $A^3 + D$ ſin. A^5, lorſque ſin. A ſeroit infiniment petit ; d'où réſulte une nouvelle confirmation de nos théorémes ſur la forme de φA néceſſaire pour maintenir l'équilibre.

206. On peut auſſi démontrer par les mêmes méthodes, que ſi au lieu de φA, on avoit $\varphi(z, u)$, il faudroit, lorſque u eſt très-petit, que φu fût de la forme a ſin. $u^2 + b$ ſin. u^4, &c.

207. La force centrifuge étant ſuppoſée f à la diſtance 1, la partie de cette force perpendiculaire au rayon r ſera exactement fr ſin. A coſ. A, & la partie qui eſt dans la direction du rayon r, ſera fr ſin. A^2 ; de ſorte que ſi on nomme F la force horiſontale, ou perpendiculaire au rayon, & F' la force verticale dirigée ſuivant le rayon, on aura exactement & rigoureuſement la proportion $F = fr$ ſin. A coſ. A . $F' = fr$ ſin. A^2 : dr : rdA ; & comme F & F' ne contiennent que a, A avec des conſtantes, il eſt clair qu'on aura une équation, dans laquelle tous les termes où ſin. A ſe trouve élevé à la même puiſſance, ſeront ſéparément égaux a zero, & dans laquelle de plus f ne ſe trouvera qu'au premier degré à tous les termes.

208. Donc en ſuppoſant chacun de ces termes égaux à zero, ce qui donne autant d'équations, dont chacune renferme tous les termes ou ſin. A eſt élevé à la même puiſſance, on tirera de ces équations une valeur de f en a, & cette valeur devra être la même pour

chaque équation, dans l'hypothèſe que le fluide puiſſe être en équilibre.

209. On ſait déja que cette équation aura lieu rigoureuſement dans le ſphéroïde elliptique, & que l'équation pour l'équilibre du ſphéroïde elliptique, avec force centrifuge, ſera (Tom V, *Opuſc* pag. 37) donnée par la proportion $\frac{1+r\alpha}{1+\alpha} - f.1+\Delta\alpha :: 1 : (1+\alpha)^3$, en prenant f pour la force centrifuge à la diſtance 1, & non pas rigoureuſement pour la force centrifuge ſous l'équateur, à la diſtance $1+\alpha$; ou plutôt pour le rapport de cette force centrifuge à l'attraction $\frac{4\pi}{3}$ d'une ſphere du rayon 1.

210. Ainſi dans l'équation génétale de l'équilibre, où il n'y a d'indéterminées que f & α, on eſt déja ſûr que la valeur de f tirée de l'équation précédente pour l'ellipſe, ſatisferoit à cette équation générale.

211. Or nous avons fait voir que l'équilibre exige pour la valeur de r une quantité de cette forme $1+\alpha(A' \text{ ſin. } A^2 + B' \text{ ſin. } A^4 + C' \text{ ſin. } A^6, \text{ &c.})$ lorſque A eſt ſuppoſé très-petit, & l'on peut même, pour plus de ſimplicité, ſuppoſer $A'=1$, en ſorte que $r=1+\alpha(\text{ſin } A^2 + B' \text{ ſin. } A^4 + C' \text{ ſin. } A^6, \text{ &c.})$

212. Donc ſi les coefficiens B', C', &c. ont la valeur qui détermine le ſphéroïde elliptique, l'équation entre f & α aura lieu; & par conſéquent il y aura une

valeur de B', C', &c. qui ſera celle qui convient à ce ſphéroide.

213. Mais y aura-t-il d'autres valeurs de B', C', &c. qui ſatisfaſſent à l'équilibre, & qui donnent une autre équation entre f & α que celle qui appartient au ſphéroide elliptique. C'eſt ce qu'il paroit difficile de croire, d'autant que la valeur linéaire de f en α, tirée de chaque terme égalé à zero, doit être la même dans chacune de ces équations, & que ces équations étant en nombre infini, & ne pouvant différer entr'elles que par la valeur des coefficiens B, C, &c., il paroît difficile que pluſieurs valeurs de f en α puiſſent y ſatisfaire. Ceci n'eſt au reſte qu'une ſimple conjecture, qui mériteroit un plus profond examen.

214. Si on fait $r = 1 + (A' + B'k + C'k^2 + D'k^3)$, k étant le coſinus de A, (Tom. III, *Opuſc.* pag. 180 & 181), nous avons fait voir qu'en ſuppoſant un noyau ſphérique de la denſité $\frac{1}{7}$, & abſtraction faite de la force centriſuge, D peut être tout ce qu'on voudra; & qu'ainſi dans cette hypothèſe il y aura équilibre, quelque figure qu'on donne au ſphéroide, pourvu que cette figure differe peu d'une ſphere.

215. On peut voir aiſément, par la même raiſon, que ſi $r = 1 + (A' \text{ ſin. } A^3 + B' \text{ ſin. } A^4 + C' \text{ ſin. } A^6$, &c.) il y aura un rapport de denſité entre le noyau & le fluide, qui donnera toutes ſortes de figures d'équilibre.

216. Lorſque $B' = 0$, & $C' = 0$, &c., c'eſt-à dire, lorſque le ſphéroide eſt à très-peu près elliptique, ſi

le rapport du noyau au fluide, n'eſt pas tel qu'il le faut pour que l'on ait toutes ſortes de figures d'équilibre, on peut y établir l'équilibre par le moyen de la force centrifuge, nous l'avons fait voir ailleurs, (*Recherches ſur le Syſtême du Monde*, Tom. III, page 184 & ſuiv.)

217. Il n'en eſt pas de même pour les autres termes B' ſin. k^4, C' ſin. k^6, &c ſi la denſité du noyau n'eſt pas telle qu'il le faut pour la condition requiſe à l'équilibre, on ne peut y ſuppléer par la force centrifuge, parce que cette force ne donne pas, au moins dans la premiere approximation, de terme qui puiſſe détruire ceux qui viennent de B' & de C', &c.

218. J'ai fait voir (Tome V, *Opuſc.* pag. 37) que ſi le fluide a un noyau ſphérique au centre, la figure requiſe pour l'équilibre ne ſauroit être rigoureuſement elliptique. Elle le ſera ſeulement à-peu-près, ſi la force centrifuge eſt ſuppoſée très-petite par rapport à la peſanteur.

219. Mais on peut demander ſi dans ce cas il y aura rigoureuſement une figure poſſible d'équilibre? C'eſt ce qu'il ne paroît pas facile de prouver, cependant cette poſſibilité paroît aſſez vraiſemblable; & dans ce cas il y auroit une figure non rigoureuſement, mais à très-peu-près elliptique, & peu différente du cercle, qui donneroit l'équilibre rigoureux.

220. Dans cette ſuppoſition, nous avons fait voir que, ſi le rapport des denſités du noyau & du fluide,

eſt $= \frac{1}{7}$, le fluide, ſuppoſé en repos, pourra avoir telle figure qu'on voudra, pourvu qu'elle ſoit à-peu-près elliptique & peu différente du cercle.

221. Il paroîtroit donc que, pour avoir l'équilibre rigoureux, il ſuffiroit de faire à cette figure un changement infiniment petit du ſecond ordre, c'eſt-à-dire, de l'ordre α^2, comme nous l'avons déja obſervé, Tom. VI, *Opuſc.* pag. 223.

222. Néanmoins, comme cette ſuppoſition même d'un changement de l'ordre de α^2 pourroit encore ne pas ſuffire à l'équilibre, il ſeroit alors néceſſaire de donner à la force centrifuge f une petite valeur, c'eſt-à-dire, de faire tourner tant ſoit peu le fluide.

223. Mais il y auroit toujours cette différence entre le cas où le rapport des denſités eſt $\frac{1}{7}$, & ceux où il ne l'eſt pas, que dans le premier cas, la force centrifuge ne devra être que de l'ordre de α^2, au lieu que dans les autres cas, elle ſera de l'ordre de α.

REMARQUES
SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

EN reliſant ce Mémoire, long-temps après qu'il a été fait, j'ai trouvé encore les Remarques ſuivantes à y ajouter. J'ai cru qu'elles pourroient être utiles dans la recherche de l'attraction des ſphéroïdes.

Remarque ſur l'article 133.

1. On peut obſerver ici que dans la belle méthode donnée par M. de la Grange, pour trouver l'attraction des ſphéroïdes, il détermine l'attraction d'un point pris au-dedans du corps par la *ſomme* des rayons partans de ce point, mais que cette ſomme en eſt proprement la *différence*, & le doit être, parce que les rayons ſont diſpoſés en ſens contraire, & exercent ſur ce point des attractions oppoſées.

2. On peut remarquer auſſi que les deux valeurs de r en p & en q, qu'on trouve dans ce cas-là, ſavoir, $r = k \pm \sqrt{s}$, (k étant ainſi que s une fonction de ſin. & cof. de p & de q) ſont telles qu'en faiſant p négatif, la valeur poſitive ſe change en négative, & la néga-

tive

tive en poſitive, lorſque le point attiré eſt au-dedans du corps, ce qui doit en effet avoir lieu dans les ſphéroïdes elliptiques, où la ligne tirée par le point atiré, coupe toujours le ſphéroïde en deux points ſeulement, & en deux points oppoſés. Dans ce cas, la quantité k devient de ſigne contraire, en faiſant ſin. p & cof. p négatifs, & s reſte la même, comme nous avons vu dans l'art. 132, pour ζ dans la quantité $Z \pm \sqrt{\zeta}$.

3. Mais on auroit tort de croire que, quand r n'a que deux valeurs, c'eſt une marque que le rayon ne coupe la ſurface ou la courbe, qu'en deux points. Car ſoit, par exemple, $r = a$ cof. $p^2 \pm b$ ſin. p, il eſt clair qu'en ſuppoſant p fort petit & $= \alpha$, les deux valeurs de r ſont poſitives, c'eſt à dire, toutes deux du même côté, ſuppoſons maintenant $p = 180 + \alpha$, les deux valeurs de r ſeront auſſi poſitives & égales aux deux précédentes, mais placées en ſens contraires, en ſorte que le rayon r coupera la courbe en quatre points, deux de chaque côté du point attiré. On voit aiſément que dans ce cas il ne faudroit pas prendre en général la ſomme des deux valeurs de r, ni même leur différence, pour avoir l'attraction du ſphéroïde, parce que ce ſphéroïde a pour ainſi dire deux ſurfaces différentes, & qu'il eſt comme compoſé de deux ſolides. Il faudra varier le calcul ſuivant les cas.

Sur l'article 136.

1. Si la courbe AO génératrice du ſphéroïde n'étoit pas très-peu différente du cercle AB, (Fig. 16) & qu'en nommant CA ou CB, 1, l'angle $BCA = \zeta$, $CO = 1 + \varphi\zeta$, x les parties de la ligne BO, à commencer du point B, on voulût avoir l'attraction de BO, (ou plutôt du petit ſolide formé par BO) ſur le point A, on auroit cette attraction ſuivant $AC = dx \times (1 - x)\, d\zeta (1-x) \sin\zeta \times \frac{1-(1-x)\cos\zeta}{\sqrt{[(1-(1-x)\cos\zeta)^2 + (1-x)^2 \sin.\zeta^2]^3}} = \frac{dx(1-x)^2\, d\zeta \sin\zeta (1 - \cos.\zeta + x\cos\zeta)}{[1 - 2(1-x)\cos\zeta + (1-x)^2]^{\frac{1}{2}}}$, quantité qu'il faudra multiplier encore par le rapport 2π de la circonférence au rayon. Si on intégre cette équation en ne regardant que x comme variable, on verra aiſément que l'intégration dépendra des logarithmes, puiſqu'en faiſant $1 - x = y$, la différentielle deviendra égale à $\frac{-2\pi dy\, y^2\, d\zeta \sin\zeta (1 - y\cos\zeta)}{(1 - 2y\cos\zeta + y^2)^{\frac{1}{2}}}$; quantité qui s'intégre par logarithmes, en regardant ζ comme conſtant. Delà il eſt aiſé de conclure que, quelle que ſoit la fonction $\varphi\zeta$, la différentielle à intégrer ſera de la forme ſuivante $Z\, d\zeta \times Z''$, Z'' étant une fonction de ζ en partie algébrique, en partie logarithmique.

2. On peut, ſans beaucoup de peine, appliquer

cette méthode au cas ou le point A, dont on cherche l'attraction, n'eſt pas le ſommet du ſphéroïde, mais tout autre point, mais dans tous les cas, le réſultat de la triple intégration ſeroit ſi compliqué, que nous abandonnons cette recherche à ceux qui voudront la pouſſer plus loin.

Sur l'article 173.

1. Au lieu de $\varphi(\text{cof. } p \text{ cof. } \omega - \text{ſin. } p \text{ ſin. } \omega \text{ cof. } q)$, on peut écrire $\varphi[\text{cof. } \omega + (\text{cof. } p - 1) \text{ cof. } \omega - \text{ſin. } p \text{ ſin. } \omega \text{ cof. } q)$, & pour avoir l'attraction horiſontale & l'équation du ſphéroïde qui en réſulte, on emploiera une méthode analogue à celles que nous avons données ailleurs pour de ſemblables queſtions (*a*), en développant en ſérie la fonction précédente, & en faiſant attention, 1°. qu'il faut négliger les termes où cof. q ſe trouve avec une dimenſion paire, parce que ces termes ſe trouveront multipliés encore par cof. q & ſeront par conſéquent nuls dans l'intégration; 2°. que les puiſſances impaires de cof. q (les ſeules qu'il faille conſerver ici) étant toujours accompagnées des puiſſances impaires de ſin. p, & ces quantités ſe trouvant encore multipliées par ſin. p^2 dans le facteur $\frac{dp\,dq \text{ ſin. } p^2 \text{ cof. } q}{(1-\text{cof. } p)^{\frac{1}{2}}}$, ſin. p y ſera à une puiſſance impaire, & comme dp ſin. p eſt la différence de $1 - \text{cof. } p$,

(*a*) Voyez Tom. V, *Opuſc.* pag. 114.

il ſera aiſé d'appliquer ici les formules données dans le Tom. V de nos *Opuſcules*, pag. 28, art. 55 & ſuiv. 3°. Nous avons donné encore ailleurs (*a*) une méthode très-ſimple d'avoir l'intégrale de dq cof. q^{2m} lorſque $q = 180$, ou 360°. 4°. Enfin, comme ſin. ϕ accompagne toujours cof. q, & que cof. q ne doit ſe trouver dans la fonction développée qu'avec une dimenſion impaire, il eſt clair que ſin. ϕ ſe trouvera par-tout avec une dimenſion impaire, & comme le ſecond membre de l'équation qui donne l'équilibre, eſt $\frac{dq \text{ cof. } \phi}{d\phi} = \frac{-\text{ſin. } \phi\, d\zeta}{dy}$ (en nommant φ cof. θ, ζ, & cof. ϕ, y) par conſéquent ſin. ϕ diſparoîtra de tous les termes, & il ne reſtera que des puiſſances paires de ſin. ϕ. Nous remarquerons encore que pour avoir l'intégrale totale qui exprime l'attraction du ſphéroide, il faut faire, ou $p = 180°$ & $q = 360°$, ou $p = 360$ & $q = 180°$. Le réſultat ſera le même dans les deux cas.

2. On parviendra aiſément par ce moyen à une équation qui aura un nombre infini de termes, & qui répondra à celle que M. de la Place a trouvée de ſon côté dans les Mém. de 1773. Mais il nous ſemble que cette équation aura toujours, par la nature de la ſolution, deux déſavantages. Le premier, d'être fondée ſur le développement d'une fonction en ſérie, développement qui peut donner un très-faux réſultat, comme

(*a*) *Recherc. ſur le Syſt. du Monde*, Tom. II, pag. 225 & ſuiv.

nous l'avons ſouvent remarqué dans d'autres problêmes. En effet, qu'on ſuppoſe ici, par exemple, $\varphi(\text{cof. } \omega + \rho)$ à la place de la fonction cherchée, & qu'on faſſe cette fonction égale à une puiſſance fractionnaire $\frac{m}{n}$, on verra (Tom. V, *Opuſc.* pag. 171 & ſuiv.) que, ſi cof. PR, ou cof. $\omega + \rho$ eſt tel que ρ ne ſoit pas très-petit par rapport à cof. ω, la ſérie pourra être divergente, & par conſéquent fauſſe, ainſi que l'équation qui en réſulte.

3. Un ſecond déſavantage de cette équation qui donne la nature du ſphéroïde ſuppoſé en équilibre, eſt d'avoir une infinité de termes, qui la rendent très-difficile à intégrer. Mais voilà juſqu'où l'analyſe a pu aller juſqu'ici dans cette ſolution.

4. Soit fait $p = 2u$, on aura $1 - \text{cof. } p = 1 - \text{cof. } 2u = 2 \text{ ſin. } u^2$, & coſin. $p = 1 - 2 \text{ ſin. } u^2$, ſin. $p =$ ſin. $2u = 2$ ſin. u cof. u; ainſi la différentielle $\frac{dp\,dq \text{ ſin } p^2 \text{ cof. } q}{(1 - \text{cof. } p)^{\frac{1}{2}}}$, deviendra de la forme $du\,dq$ cof. $q \times \frac{\text{ſin. } u^2 \text{ cof. } u^2}{\text{ſin. } u^2} = \frac{du\,dq \text{ cof. } q \text{ cof. } u^2}{\text{ſin. } u}$, & φA ou $\varphi(\text{cof. } p$ cof. $\omega -$ ſin. p ſin. ω cof. $q)$ deviendra auſſi $\varphi(\text{cof. } \omega - 2 \text{ ſin. } u^2 \text{ cof. } \omega - 2 \text{ ſin. } u \text{ cof. } u \text{ ſin. } \omega \text{ cof. } q)$.

5. Quant à l'attraction verticale, elle ſera = à la fonction précédente, multipliée par $\frac{dp\,dq \text{ ſin } p}{(1 - \text{cof. } p)^{\frac{3}{2}}}$, c'eſt-

à-dire, par $\frac{du\,dq\,\text{ſin. }u\,\text{cof. }u}{\text{ſin. }u} = du\,dq\,\text{cof. }u$.

6. On peut, ſi l'on veut, trouver l'équation du ſphéroïde, en opérant ſur cette fonction comme nous avons opéré tout-à-l'heure ſur la fonction en Δ, p, q, il faudra ſeulement obſerver que les intégrales en u & en q doivent être priſes de maniere, qu'elles ſe terminent lorſque $u = 90$, & $q = 360$, ou lorſque $u = 180$, & $q = 180$.

7. L'équation $1 - \text{cof. } p = 2\,\text{ſin. } u^2$, donne $2(1 - \text{cof. } p) = 4\,\text{ſin. } u^2$, ou $QR^2 = 4\,\text{ſin. } u^2$, d'ou $\text{ſin. } u = \frac{QR}{2}$, ainſi il eſt aiſé de voir que ſin. u eſt le ſinus de l'angle que forme QR avec la tangente en Q.

Sur l'article 174 & ſuiv.

1. La différentielle de l'attraction horiſontale étant $\frac{dp\,dq\,\text{ſin. } p^2\,\text{cof. } q}{(1 - \text{cof. } p)^{\frac{1}{2}}} \times \varphi\,(\text{cof. } p\,\text{cof. } \Delta - \text{ſin. } p\,\text{ſin. } \Delta\,\text{cof. } q)$, il eſt aiſé de voir que ſi $\varphi A = \text{cof. } A^m$, m étant un nombre quelconque poſitif, entier ou rompu, la difficulté ſe réduira, lorſque Δ ſera très-petit, à intégrer $\frac{x^n\,dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, n étant un nombre quelconque; donc ſi $n = \frac{m}{2} + \frac{r}{2}$, r étant un nombre entier impair, la différentielle ſe réduit à des arcs de cercle.

2. Suppoſons toujours (Fig. 15) $PQ = \delta$, $QR = p$, & l'angle $OQR = q$, ſoit $PR = \rho$, & imaginons que le ſphéroïde ne ſoit pas un ſolide de révolution, en ſorte que ſon rayon ſoit $r + \alpha\varphi(PR, \zeta)$, ζ exprimant l'angle entre le méridien PR & un méridien fixe, on verra aiſément qu'en nommant l'angle OPR, σ, & η l'angle entre le méridien fixe & le méridien PQO, on aura $\sigma = \zeta \pm \eta$; d'où ſin. σ = ſin. ζ cof. $\eta \pm$ cof. ζ ſin. η, & cof. σ = cof. ζ cof. $\eta \mp$ ſin. ζ ſin. η, par la même raiſon, ſin. ζ = ſin. σ cof. $\eta \mp$ ſin. η cof. σ, & cof. ζ = cof. σ cof. $\eta \pm$ ſin. σ ſin. η. De plus, on remarquera que η eſt conſtant, ainſi que δ, que ſin. σ = (comme il eſt très-aiſé de le voir) $\frac{\text{ſin. } p \text{ ſin. } q}{\text{ſin. } \rho}$; & que cof. $\sigma = \frac{\sqrt{(\text{ſin. } \rho^2 - \text{ſin. } p^2 \text{ ſin. } q^2)}}{\text{ſin. } \rho}$, ou plus ſimplement $\frac{RK}{\text{ſin. } \rho}$ (RK étant la projection de ſin. ρ) = $\frac{RN + NK}{\text{ſin. } \rho}$, ou $\frac{RM \text{ cof. } \delta + MV}{\text{ſin. } \rho} = \frac{\text{ſin. } p \text{ cof. } q \text{ cof. } \delta + \text{cof. } p \text{ ſin. } \delta}{\text{ſin. } \rho}$; d'où l'on voit que ſi la quantité φA eſt telle, que la quantité radicale ſin. ρ diſparoiſſe du dénominateur, & que ſin. ρ, ou $\sqrt{(1 - \text{cof. } \rho^2)}$, ſe trouve élevé à une puiſſance paire, on pourra trouver aiſément l'attraction verticale & horiſontale d'un tel ſphéroïde.

3. Il eſt encore bon d'obſerver que, ſi on exprime l'excès très-petit du rayon CR ſur l'axe CP, par une fonction de PR (ρ) & de ζ, il faut que cette fonction

ſont telle, qu'en ſuppoſant l'angle ζ augmenté de 180°, elle demeure la même; autrement on auroit deux ſphéroïdes différens repréſentés par la même équation.

Sur l'article 194.

1. Si l'on veut faire exactement & rigoureuſement le calcul des lignes dont il eſt fait mention dans cet article, on conſidérera (Fig. 15) qu'en faiſant $CP = 1$, $CR = 1 + \varphi\zeta$, l'angle OPR, ν, & l'angle PCQ, λ, on auroit $CQ = 1 + \alpha\varphi\lambda$, $CK = (1 + \alpha\varphi\zeta)$ cof. ζ, $RK = (1 + \alpha\varphi\zeta)$ ſin. ζ cof. ν, $NK = (1 + \alpha\varphi\zeta)$ cof. $\zeta \frac{\text{ſin. } \lambda}{\text{cof. } \lambda}$, $RN = RK - NK = \left(\frac{1+\alpha\varphi\zeta}{\text{cof. } \lambda}\right) \times$ (ſin. ζ cof. ν cof. λ — cof. ζ ſin. λ), $RM = RN$ cof. $\lambda = (1 + \alpha\varphi\zeta) \times$ (ſin. ζ cof. ν cof. λ — cof. ζ ſin. λ), $QM = 1 + \alpha\varphi\lambda -$ CM, & CM ou $CN + MN = \frac{CK}{\text{cof. } \lambda} + \frac{RM \times \text{ſin. } \lambda}{\text{cof. } \lambda}$ $= (1 + \alpha\varphi\zeta)$ cof. ζ cof. λ + ſin. ζ cof. ν ſin. λ), d'où l'on tirera aiſément la valeur de QR.

2. Si dans cet article 194, on fait $1 -$ cof. ζ cof. $\lambda -$ ſin. ζ ſin. λ cof. $\nu = x$, on aura cof. $\nu = \frac{1 - x - \text{cof. } \zeta \text{ cof. } \lambda}{\text{ſin. } \zeta \text{ ſin. } \lambda}$; & en regardant ſin. ζ & ſin. λ comme conſtans, & ſubſtituant pour ν ſa valeur en x, on trouvera, par une méthode analogue à celle de l'art. 113, que l'intégration de la quantité qui multiplie $\varphi\zeta$ dans l'expreſſion des deux attractions, dépend, pour l'attraction

l'attraction horiſontale, de la rectification d'une ellipſe, & pour l'attraction verticale, de $\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$; c'eſt-à-dire, de la rectification d'une ellipſe & d'une hyperbole.

3. Si on avoit ſin. $\Delta = 0$ & cof. $\Delta = 1$, l'intégration ſe réduiroit, comme il eſt aiſé de le voir, aux arcs de cercle ou aux logarithmes; donc ſi on ſuppoſe ſin. Δ très-petit, il eſt aiſé de voir que l'intégration dépendra encore en ce cas des arcs de cercle ou des logarithmes.

4. Puiſque $\frac{RM}{QR^2}$ eſt égale à la différence (doublée) de $\frac{1}{(1-\text{cof. }\zeta\text{ cof. }\Delta-\text{ſin. }\zeta\text{ ſin. }\Delta\text{ cof. }\omega)^{\frac{1}{2}}}$, diviſée par $d\Delta$, qu'on réduiſe en ſérie cette quantité dans l'hypothèſe que Δ ſoit très-petit, après l'avoir miſe ſous la forme $[1-\text{cof. }\zeta+\text{cof. }\zeta(1-\text{cof. }\Delta)-\text{ſin. }\zeta\text{ ſin. }\Delta\text{ cof. }\omega)^{-\frac{1}{2}}$, & qu'enſuite on la différentie par rapport à Δ, on aura une ſuite de termes de la forme cof. $\zeta^r(1-\text{cof. }\Delta)^p x$ ſin. ζ ſin. Δ^r cof. $\omega^r x \frac{1}{(1-\text{cof. }\zeta)^{\frac{n}{2}}}$, dans leſquels il faudra négliger ceux où cof. ω ſe trouvera à une puiſſance impaire, & ces termes multipliés par $\omega d\zeta\varphi\zeta d\pi$ ſin. ζ donneront l'élément de l'attraction horiſontale. De plus il eſt clair que, ſi $\varphi\zeta$ étoit conſtant, la quantité dont il s'agit, exprimeroit l'attraction horiſontale d'une ſphere, laquelle eſt $= 0$.

5. A l'occaſion des calculs de cet article 194 ſur l'attraction du ſphéroide, je ferai une remarque qui pourra être de quelqu'utilité.

6. Dans le troiſiéme Volume de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, pag. 197 & ſuiv. j'ai fait voir que l'attraction d'une ſurface ſphérique eſt très-différente ſur un point placé à la ſurface même, ou à une diſtance infiniment petite en-dedans, ou en-dehors de cette ſurface, ce que j'ai depuis développé & expliqué dans le Tome I de mes *Opuſcules*, pag. 258 & ſuiv.

7. Il n'en eſt pas de même de l'attraction d'une ſphere ou d'une portion de ſphere, renfermée entre deux ſurfaces concentriques, ſur un point placé ſur cette ſurface, ou à une diſtance très-petite, car dans tous les cas, l'attraction eſt égale à la maſſe diviſée par le quarré de la diſtance du point au centre de la ſphere.

8. Or il doit en être de même de l'attraction d'un ſphéroide ſur un point placé, ſoit à la ſurface, ſoit à une diſtance très-petite en-dedans ou en-dehors, & en effet, ſi dans les formules du troiſiéme Volume de nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, on prend celles qui donnent l'attraction du ſphéroide à la ſurface, ou infiniment près de la ſurface, on trouvera qu'elles ſont les mêmes. Par exemple, pag. 175, Corol. II, les deux premieres formules donneront en retranchant la ſeconde de la premiere, & réduiſant à l'homogénéité, $\frac{2}{1} - 1 = -\frac{2}{3}$, de même, pag. 195, la premiere formule du Corol. V, moins la ſeconde du

Corol. II, pag. 193, leſquelles formules répondent aux deux précédentes, en faiſant $n = 0$, donnent, en réduiſant à l'homogénéité $\frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$; & la premiere formule du Corol. VI, pag. 196, moins la troiſiéme du Corol. IV, pag. 194, donne de même $-\frac{5}{3}$, on trouvera pareillement qu'en retranchant toujours la formule qui répond à $\frac{(x \pm n)\,dx}{(nn \pm 2nx + rr)^{\frac{3}{2}}}$, ($n$ étant ſucceſſivement poſitif, zero, & négatif), des formules qui ſe correſpondent l'une à l'autre dans les trois différentes ſuppoſitions ſur la valeur de n, les réſultats ſeront les mêmes.

9. Enfin, on trouveroit auſſi les mêmes réſultats en prenant les formules des pag. 209 & ſuiv., qui ſont les mêmes que celles des pag. 192 & ſuiv.

10. Lorſque $\Delta > r$, $\Delta = r$, & $\Delta < r$, Δ étant dans les deux cas extrêmes infiniment peu différent de r, on trouve que la quantité $\varphi(PQ) \times \frac{-d\cos QR(r \pm \cos QR)}{(rr + \delta\delta \pm 2r\cos QR)^{\frac{1}{2}}}$ eſt $= 4\pi \times \varphi(PQ)$ dans le premier cas, $= 2\pi \times \varphi(PQ)$ dans le ſecond, & $= 0$ dans le troiſiéme. Cependant il ſembleroit que dans le ſecond, comme dans le troiſiéme cas, elle devroit être $= 0$, par la théorie de l'attraction de la ſphere.

11. Mais il faut remarquer qu'en retranchant cette quantité de la différentielle correſpondante dans laquelle on a mis $\varphi(PR)$ au lieu de $\varphi(PQ)$, on a

pour facteur, au lieu de $\varphi(PQ)$, $\varphi(PR)-\varphi(PQ)$, qui devient évidemment zero en R, en ſorte que $\varphi(PR)$ doit être regardée, comme formée de deux quantités $p+\varphi(PQ)$ telles, que la premiere eſt $=0$ en R, & que l'attraction produite par la ſeconde $\varphi(PQ)$, de quelque maniere qu'on repréſente cette attraction, eſt entiérement détruite par une attraction contraire & ſemblable, ainſi le calcul du ſecond cas eſt exact, & doit l'être, comme on peut le conclure aiſément des remarques précédentes.

12. En effet, il arrive alors la même choſe que, ſi au lieu de prendre, par exemple, l'intégrale de $\frac{x\,dx(r-x)}{x\,(1+x)^{\frac{1}{2}}}$, dans la pag. 177 du troiſiéme Volume de nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, & d'en retrancher l'intégrale de $\frac{x\,dx\,r}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$, on retranchoit la ſeconde différentielle de la premiere, & qu'on prît l'intégrale de la différence $-\frac{x\,x\,dx}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$, laquelle ſeroit $=-\frac{2}{3}$, comme on le trouveroit par l'autre procédé; & ainſi du reſte.

13. Cette remarque levera entiérement la crainte qu'on pourroit avoir, que les intégrales ne fuſſent quelquefois fautives, en s'y prenant par la méthode que nous avons donnée dans ce troiſiéme Volume de nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*; & cette obſer-

vation a lieu, ſi je ne me trompe, pour toutes les autres méthodes, qu'on pourroit employer à la détermination de l'attraction, qu'un ſphéroide infiniment peu différent d'une ſphere, exerce ſur un de ſes points quelconques.

Sur l'article 195.

1. Depuis que j'ai écrit ce qui eſt contenu dans cet article, j'ai vu que M. de la Place (dans les Mém. de l'Acad. de 1774) avoit auſſi appliqué ſes théorêmes ſur la loi de la peſanteur, au cas du ſphéroide qui n'eſt pas de révolution. On voit que ces théorêmes ſe déduiſent de notre méthode avec une grande facilité.

2. Ce même Académicien, à qui j'avois communiqué ma démonſtration très-ſimple de ſon théorême, en a auſſi trouvé depuis une autre plus ſimple que la premiere, & qu'il a lue à l'Académie au mois de Juillet 1778 (*a*). Il m'a appris en même-temps que M. de la Grange avoit auſſi trouvé de ſon côté une démonſtration de ce théorême général.

3. Si on ſuppoſe l'attraction proportionnelle à une puiſſance n de la diſtance, on trouvera auſſi très-aiſément, par le plus ſimple calcul, les théorêmes que M. de la Place a démontrés dans cette même addition à ſes recherches, lue à l'Académie en 1778. En effet, il eſt clair, 1°. que l'attraction verticale a dans ce cas à l'ex-

(*a*) Elle a été imprimée dans le Volume de 1774, pag. 261 & ſuiv.

poſant du dénominateur $-\frac{n}{2}$ au lieu de 1, & qu'ainſi il faut ajouter à l'expoſant du dénominateur trouvé pour le cas de $n=-2$, $-\frac{n}{2}=1$, ce qui rend cet expoſant $=-\frac{n}{2}-1+\frac{1}{2}=\frac{-n-1}{2}$, ou en numérateur, $+\frac{n+1}{2}$. 2°. Que l'expoſant de l'attraction horiſontale ſera, par la même raiſon, $-\frac{n}{2}-1+\frac{1}{2}=\frac{-n+1}{2}$, ou en numérateur $+\frac{n-1}{2}$; d'où réſultent les théorèmes dont il s'agit.

4. On voit auſſi que par les formules du Tom. V de nos *Opuſcules*, page 26 & ſuiv., la recherche de la figure de la terre ſe réduira dans ce cas, à l'intégration de $\frac{du\,\text{ſin.}\,u^3\,\text{cof.}\,u^m}{(1-\text{cof.}\,u)^{\frac{n+1}{2}}}$, ou du ſin. u^3 cof. $u^m\times(1-\text{cof.}\,u)^{\frac{n-1}{2}}$, facilement intégrable par les méthodes connues, au moins tant que n eſt un nombre entier.

Sur l'article 196.

1. Toutes les fois qu'en faiſant A infiniment petit, la valeur de r renferme ſin. A^m, $\frac{m}{n}$ étant une fraction, l'équilibre eſt impoſſible, quand même la figure n'auroit point d'équation réguliere. C'eſt encore une

ſuite de cet art. 196, & de la méthode de l'art. 193 pour trouver l'attraction du ſphéroide.

2. Ajoutons en même-temps que, quand on auroit démontré l'impoſſibilité de l'équilibre en regardant φA comme une fonction continue, elle ne ſeroit pas abſolument démontrée pour cela dans le cas, très-poſſible, où φA ſeroit une fonction diſcontinue, ou plutôt une fonction non exprimable algébriquement, ni même ſous une forme tranſcendante, quoique la courbe génératrice parût avoir aux yeux une courbure réguliere & continue. Nous avouerons néanmoins que la poſſibilité de l'équilibre dans ce cas eſt bien peu vraiſemblable.

3. Si au lieu de faire commencer les arcs PR en P, on les faiſoit commencer en un point quelconque Q du méridien, en ſorte que PQ fût $= \Delta$, & que le rayon r fût $= 1 + \alpha\varphi(\Delta + \zeta)$, alors ſuppoſant ζ infiniment petit, on trouveroit par une méthode ſemblable aux précédentes, qu'en prenant ζ infiniment petit, la valeur de r devroit être exprimée par $1 + a$ ſin. $\zeta + b$ ſin. $\zeta^2 + c$ ſin. ζ^3, &c., ou, ce qui revient au même, à cauſe de ζ infiniment petit, $1 + a'\zeta + b'\zeta^2 + c'\zeta^3$, &c.; d'où l'on conclura que ni ddr ni $d^n r$ ne ſauroit jamais être infini. On a donc une nouvelle propriété, ou condition de φA, ſavoir, qu'en ſuppoſant A tel qu'on voudra (& non plus infiniment petit) $d^n \varphi A$ ne ſauroit être infini.

Sur l'article 201.

S'il y a au centre du ſphéroïde fluide un noyau ſolide ſphérique, il ne ſera pas difficile de voir ce que ce noyau doit changer aux théorêmes dont il s'agit, car il eſt clair que ce noyau augmente l'attraction verticale de la quantité $\frac{4\pi\rho^3}{3(1+\alpha\varphi\rho)^2} \times (\Delta - 1)$, Δ étant ſuppoſé la denſité du noyau, & 1 celle du fluide, & que l'attraction verticale ne ſouffre aucune altération.

Sur l'article 202.

1. En ſuppoſant toujours le ſphéroïde peu différent d'une ſphere, on peut employer différentes méthodes pour déterminer l'attraction du ſphéroïde en un point quelconque.

On peut d'abord, en faiſant partir les rayons du centre du ſphéroïde, exprimer ces rayons par $1+\alpha\varphi A$, comme nous l'avons fait.

2. Dans la même hypothèſe, au lieu de prendre A pour l'angle QCP, on peut prendre A pour l'angle QPC, qui a ſon ſommet au ſommet P du ſphéroïde, ou plutôt le complément à deux droits de cet angle, formé par la corde PQ & la tangente en P, complément qui eſt $= 0$ en P, ainſi que l'angle QCP.

3. On peut auſſi faire partir les rayons du ſommet du

du ſphéroide dont on cherche l'attraction, & exprimer ces rayons par $\rho + \alpha\varphi A$; ρ étant le rayon correſpondant dans la ſphere dont le rayon ſeroit 1, & A exprimant l'angle QCP, ou l'angle QPC.

4. Outre ces différentes manieres d'exprimer la nature du ſphéroide ou de ſa courbe génératrice, on peut encore s'y prendre de différentes manieres pour en trouver l'attraction.

5. On peut chercher cette attraction en intégrant les quantités $\frac{\alpha\varphi A}{\rho'^3}$, ρ' étant la diſtance d'un point quelconque de la courbe au point attiré, après avoir décompoſé cette quantité dans le ſens vertical & le ſens horiſontal. C'eſt la méthode que nous avons ſuivie dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, Tom. II & III, dans le Tome V de nos *Opuſc.* pag. 25 & ſuiv., & dans le Mémoire précédent.

6. On peut auſſi employer la méthode de M. de la Grange, dans les Mém. de Berlin, de 1773, en cherchant l'attraction des petites pyramides formées par les rayons qui ont leur ſommet au point dont on cherche l'attraction. Ces méthodes ont l'une & l'autre leurs avantages.

7. Ce n'eſt pas tout encore. Pour exprimer le rayon ρ', ou QR, & pour décompoſer l'attraction, on peut employer différentes méthodes.

8. Soit QR' (Fig. 17) la projection du rayon ρ' ſur le plan PQC, qui paſſe par l'axe PC, & par le point Q dont on cherche l'attraction, & ſoit $QR' = \rho''$,

l'angle $PCQ = \delta$, l'angle que fait le rayon ρ' avec ρ'', ζ, & l'angle $R'QC$, γ, on aura une valeur de ρ' en ζ, γ, δ, comme on en a une par les angles q, p, δ dans l'art. 173, & par les angles ζ, π, δ dans l'art. 194.

9. On pourra de même avoir encore une autre valeur de ρ' par l'angle ζ, & par tout autre angle $R'QK$ de la projection QR avec une ligne fixe QK de position quelconque.

10. Si cette ligne fixe QK eſt parallèle à l'axe, on décompoſera pour lors l'attraction directe du point Q en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe, & il faudra pour l'équilibre que les ſommes ou intégrales de ces attractions ſoient entr'elles comme QZ à QH, QZ étant perpendiculaire à la courbe en Q.

11. Si la ligne fixe QK tombe ſur la perpendiculaire QZ à la courbe, alors il faudra ſimplement (ſans avoir égard à l'attraction verticale) que l'attraction horiſontale ſoit nulle. Ce qui donnera une équation d'autant plus ſimple, que $\frac{4\pi}{3}$ n'y paroîtra pas, & que le ſecond membre ſera $= 0$.

12. Si on employoit cette derniere méthode, il ſeroit peut-être bon, pour plus de ſimplicité, d'exprimer la nature de la courbe génératrice par les valeurs de CZ en A.

13. On peut faire des remarques analogues aux pré-

cédentes, pour le cas où le ſphéroide attirant n'eſt pas un ſolide de révolution. Nous abandonnons aux Géometres le détail de tous ces calculs, dont nous croyons qu'on pourra tirer parti pour perfectionner la théorie de l'attraction des ſphéroides.

14. M. Clairaut, dans ſon Livre de *la Figure de la Terre*, a déterminé l'attraction horiſontale à l'extrémité d'un diametre quelconque, par le moyen des coupes elliptiques perpendiculaires à ce diametre; on pourroit employer ici la même méthode, mais elle ſeroit moins ſimple que celle que nous avons ſuivie.

Sur l'article 209.

1. Le même M. Clairaut, dans ſon Livre de *la Figure de la Terre*, trouve que l'équation entre f & α dans l'hypothèſe elliptique, eſt $f = \frac{5}{7}\alpha - \frac{5}{147}\alpha^2 + \frac{5}{686}\alpha^3$, &c. Cette équation n'eſt exacte que lorſque α eſt aſſez petit, dans les autres cas elle eſt peu exacte; mais on peut obſerver, 1°. que lorſque $\alpha = 0$, on a $f = 0$; d'où il s'enſuit que le ſphéroide étant ſuppoſé elliptique & peu différent d'une ſphere, devient une ſphere exacte quand le fluide ne tourne pas. Nous avons de plus fait voir dans notre ſixiéme Volume d'*Opuſcules*, que dans ce cas de $f = 0$, il y a un autre ſphéroide, mais infiniment applati, & par conſéquent illuſoire, qui ſatisfait à l'équilibre. Ne pourroit-on pas conclure delà que, s'il y a quelqu'autre hypothèſe que

celle de la figure elliptique, qui donne l'équilibre en ayant égard à la force centrifuge, cette figure deviendra toujours sphérique lorsque f sera $=0$. En effet, la valeur de f en α, exprimée par une suite quelconque, doit contenir α à tous ses termes; en sorte que $f=\alpha\varphi'\alpha$; d'où l'on voit que f étant $=0$, donne d'abord $\alpha=0$, d'où résulte la figure sphérique, & ensuite $\varphi\alpha=0$, qui dans le cas de l'ellipticité donne une valeur infinie & illusoire, & semble devoir aussi donner un pareil résultat dans le cas de la non-ellipticité.

2. Nous avons donné, Tom. VI de nos *Opusc.* l'équation exacte du sphéroïde dans l'hypothèse elliptique, savoir, $2a=\frac{2k^3+g(ATk)-gk}{k^3}$. Pour exprimer cette équation par une série, la plus convergente qu'il sera possible, on mettra, au lieu de ATk, c'est-à-dire, de l'angle dont la tangente est k, $\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$, x étant le sinus verse du même angle, & 1 le sinus total, ce qui donnera $k=\frac{\sqrt{(2x-xx)}}{1-x}$; la quantité $\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$, ou $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{(2-x)}}$ peut se réduire en une série très-convergente, parce que x n'est jamais >1, & cette quantité sera exprimée par une suite de cette forme, $A\sqrt{x}+Bx^{\frac{3}{2}}+Cx^{\frac{5}{2}}$, &c., ensuite on mettra pour $\frac{3k^3+g}{k^3}$ sa valeur $\frac{3(1-x)^3}{(2x-xx)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{2x-xx+3(1-2x+xx)}{(1-x)^2}$,

& au lieu de $= \frac{g^k}{k^3}$, ou $- \frac{g}{k^2}$ ſa valeur $\frac{-g(1-x)^2}{2x-xx}$, ce qui donnera l'équation

$$\left[\frac{3(1-x)[1+2(1-x)^2]}{(2x-xx)^{\frac{1}{2}}} \times (A\sqrt{x} + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx^{\frac{3}{2}} \text{ &c.})\right] - \frac{g(1-x)^2}{2x-xx} = 2a;$$

équation dont le radical $\sqrt{x}$ diſparoîtra, comme il eſt aiſé de le voir à cauſe de $(2x-xx)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{1}{2}}$, & dont on pourra encore faire diſparoître le radical $\sqrt{(2-x)}$, en faiſant $\sqrt{(2x-xx)} = \sqrt{x}\,\zeta^2$, ce qui donne $2-x = \zeta\zeta$, & $x = 2-\zeta\zeta$, & on peut remarquer que ζ eſt la corde qui répond au ſinus verſe x.

Sur l'article 210.

1. Lorſque le ſphéroïde eſt elliptique, la valeur du rayon r eſt donnée par la proportion $r^2 \text{ ſin. } A^2 : 1 - r^2 \text{ coſ. } A^2 : (1+\alpha)^2 : 1$, d'où $r^2 \text{ ſin. } A^2 = (1+\alpha)^2 - (r^2 \text{ coſ. } A^2)(1+\alpha)^2$, & $rr = \frac{(1+\alpha)^2}{1+(2\alpha+\alpha\alpha)\text{coſ. } A^2}$, où enfin $r = \frac{1+\alpha}{\sqrt{[(1+\alpha)^2 - \text{ſin. } A^2(2\alpha+\alpha\alpha)]}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\text{ſin. } A^2(2\alpha+\alpha\alpha)}{(1+\alpha)^2}\right)}}$; d'où l'on voit que la valeur de r eſt $= 1 + \alpha \times \varphi \text{ ſin. } A$, cette fonction de ſin. A, renfermant elle-même la quantité α.

2. Or dans la théorie que nous avons donnée, nous avons ſuppoſé que φA ne contenoit point α. Il ſeroit bon de voir auſſi ce qui réſulteroit du cas où φA contiendroit α, c'eſt-à-dire, où r ſeroit $= 1 + \varphi(A, \alpha)$, α étant une quantité très-petite, & $\varphi(A, \alpha)$ étant telle, qu'elle ſoit $= 0$ quand $A = 0$. Ce ſeroit l'objet d'une nouvelle recherche dans laquelle nous ne nous engagerons point ici.

3. Nous nous bornerons à remarquer, 1°. que l'équation approchée de l'ellipſe eſt $r = 1 + \alpha \text{ ſin. } A^2$. 2°. Que par conſéquent ſi on fait $\varphi A = \text{ſin. } A^2$, & qu'on ait de plus égard à la force centrifuge, le ſphéroide dont l'équation ſeroit $r = 1 + \alpha \text{ ſin. } A^2$, α étant ſuppoſé très-petit, ſeroit à très-peu-près en équilibre, c'eſt-à-dire, qu'il ne s'en faudroit que d'une quantité de l'ordre de α^2, cenſée infiniment petite du ſecond ordre, que l'équilibre n'eût lieu dans un tel ſphéroide. 3°. Que l'équilibre ſeroit exact & parfait, ſi on ajoutoit à la quantité $\alpha \text{ ſin. } A^2$ dans la valeur de r, ce qu'il faut pour que r appartînt exactement à une ellipſe dont la différence des axes fût $= \alpha$. 4°. Que cette quantité qu'il faudroit ajouter à $\alpha \text{ ſin. } A^2$ pour avoir la valeur exacte de r, ſeroit celle qui réſulteroit du développement du radical $\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\text{ſin. } A \quad + \quad)}{(1+\alpha)}\right)}}$, c'eſt-à-dire, une ſérie infinie, dont les deux premiers termes ſeroient évidem-

ment $1+\alpha$ ſin. A^2, & de laquelle il faudroit ôter ces deux premiers termes, déja employés dans la valeur de r.

4. Delà on voit que s'il y a quelque fonction de A différente de ſin. A^2, qui donne l'équilibre du ſphéroide, ſoit en ayant égard à la force centrifuge, ſoit en la ſuppoſant nulle, cette fonction de A ne donne point, ainſi que ſin. A^2, l'équilibre rigoureux, mais ſeulement à une quantité près de l'ordre de α^2.

5. De plus, lorſque $\phi A = $ ſin. A^2, on ſait d'ailleurs que l'équilibre rigoureux eſt poſſible, en ajoutant à $r = 1+\alpha$ ſin. A^2, ce qui eſt néceſſaire pour faire appartenir le rayon r à un ſphéroide rigoureuſement elliptique, & peu différent d'une ſphere; cette quantité ajoutée contiendroit α & A, & la moindre puiſſance de α y ſeroit α^2, & ne ſeroit nulle que lorſque α ſeroit $= 0$, auquel cas α ſin. A^2 ſeroit auſſi $= 0$, & $r = 1$, ce qui donneroit une ſphere.

6. Mais on peut demander en premier lieu ſi dans ce cas de $r = 1+\alpha$ ſin. A^2, il ne ſeroit pas poſſible d'ajouter à la valeur de r, pour établir l'équilibre, non-ſeulement la valeur convenable au ſphéroide rigoureuſement elliptique, mais d'autres fonctions de α & de A, dans leſquelles la moindre puiſſance de α ſeroit plus grande que l'unité, ou même $= \alpha^2$, & qui donneroient également l'équilibre? En ce cas, tous ces ſphéroïdes, (à l'exception du ſphéroide rigoureuſement elliptique)

différeroient en rigueur du ſphéroïde elliptique d'une quantité de l'ordre de α^m, m étant > 1, ou même $= 2$; & on pourroit en conclure, avec aſſez de vraiſemblance, que, ſi la force centrifuge f n'étoit pas très-petite, il y auroit pluſieurs ſphéroïdes, différant ſenſiblement les unes des autres, & dont un ſeul ſeroit elliptique, qui donneroient l'équilibre.

7. On peut demander en ſecond lieu ſi dans le cas où $r = 1 + \alpha\varphi A$, (φA étant une certaine fonction de A) donneroit l'équilibre à une quantité près de l'ordre de α^2, on pourroit trouver, comme dans le cas de $r = 1 + \alpha$ ſin. A^2, une quantité qui étant ajoutée à la valeur $1 + \alpha\varphi A$ du rayon r, donneroit l'équilibre exact & rigoureux? Si cette quantité exiſtoit, il eſt évident qu'elle contiendroit α & φA, & que la plus petite puiſſance de αy ſeroit α^m, m étant > 1. De plus, il ſe pourroit encore (comme nous venons de le remarquer pour le cas de $r = 1 + \alpha$ ſin. A^2) que cette quantité, ajoutée à la valeur de r pour l'équilibre exact, ne fût pas unique, & qu'on pût faire différens changemens à la valeur de r, tous d'un ordre α^m plus petit que α, qui donneroient l'équilibre rigoureux.

8. Toutes ces queſtions ſont à-peu-près de la même nature, que celle que nous avons agitée dans le Tom. VI de nos *Opuſc.* pag. 223, ſavoir, ſi dans le cas où le ſphéroïde a un noyau tel, qu'il eſt, à très-peu-près, en équilibre en donnant à α telle valeur qu'on veut, l'équilibre exact & rigoureux eſt poſſible, en faiſant

à

à la figure du ſphéroïde un changement d'un ordre moindre que α.

9. En général il paroît aſſez vraiſemblable & aſſez naturel de ſuppoſer que lorſqu'un ſphéroïde, dont la différence des axes eſt α ou de l'ordre de α, dans quelqu'hypothèſe que ce ſoit, a une figure où l'équilibre a lieu à une quantité près de l'ordre de α^m, m étant > 1, un changement de l'ordre de α^m, fait à ce ſphéroïde, donneroit l'équilibre rigoureux. Mais la choſe n'eſt rigoureuſement certaine que dans le ſeul cas où $r = 1 + \alpha \text{ ſin. } A^2$, & où le ſphéroïde eſt entierement homogène, & tourne ſur ſon axe, les théories connues nous apprennent que ce ſphéroïde, ſuppoſé rigoureuſement elliptique, ſera en équilibre. Dans les autres cas, on ne pourroit réſoudre exactement les queſtions que nous propoſons ici, que par un calcul très-compliqué, très-ſubtil, & qui peut-être paſſe les forces de l'analyſe connue.

LIV. MÉMOIRE,

Contenant différentes Recherches d'Optique.

§. I.

Sur les loix de la réfraction.

1. M. Newton a prétendu dans ſon *Optique*, (Liv. I, Part. II, Prop. III, Exp. VIII) que ſi un rayon qui a traverſé différens milieux B, C, contigus à un même milieu A, (le rapport des ſinus, pour les rayons des couleurs extrêmes dans le paſſage de A à B, C étant ſuppoſé $\frac{1}{m}$ & $\frac{1}{m'}$, $\frac{1}{M}$ & $\frac{1}{M'}$), ſi ce rayon, dis-je, ſort parallèle à ſa premiere ſituation, la lumiere ſera blanche, & il a conclu delà, 1°. que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1} = \frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$. 2°. Que le rapport des ſinus dans le paſſage de B à C ſera $\frac{m}{M}$ & $\frac{m'}{M'}$. M. Klingenſtierna a dé-

montré que la premiere de ces deux loix ne pouvoit ſubſiſter avec la prétendue blancheur des rayons, réſultante du paralléliſme Voyez le ſixiéme Volume de nos *Opuſc.* XLIXe Mém. art 1, 2, 3, 4 & 5.

2. Comme il eſt très-eſſentiel de démontrer que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$, n'eſt pas conſtant, puiſque ſi cette équation avoit lieu, les couleurs ne pourroient jamais être détruites dans les lunettes, j'ai obſervé, ce me ſemble, avec raiſon, que M. Klingenſtierna n'a pas démontré en général la fauſſeté de cette équation, mais ſeulement que cette équation ne pouvoit ſubſiſter avec la prétendue blancheur réſultante du paralléliſme des rayons émergens aux incidens.

3. Des amis de feu M. Klingenſtierna m'ont objecté que cet habile Mathématicien ne regardoit pas l'expérience de M. Newton ſur cette prétendue blancheur, comme vraie, & qu'au contraire il la croyoit fauſſe. En ce cas, ſa démonſtration de l'incompatibilité des deux aſſertions, ne prouve point ce qu'il étoit le plus eſſentiel de démontrer, ſavoir, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ n'eſt pas conſtant, puiſque ſa démonſtration eſt appuyée ſur une ſuppoſition fauſſe, & reconnue, dit-on, pour telle par lui-même. Il ſe peut que M. Klingenſtierna ſe ſoit

ſeulement propoſé de démontrer l'*incompatibilité* de la *pretendue* loi de Newton avec ſon expérience auſſi *pretendue*, cela ſuffit pour jetter un doute très-bien fondé, ou ſur la loi, ou ſur l'expérience, ou même ſur l'une & ſur l'autre, mais non pas pour démontrer rigoureuſement la fauſſeté de la loi. Il faut avoir recours pour cela à des moyens directs, & indépendans de toute hypothèſe.

4. On dira peut-être, comme je l'ai déja remarqué, (Tom. VI, *Opuſc.* pag. 269, art. 20) qu'il y a des cas ou l'expérience de Newton peut être vraie, c'eſt-à-dire, où les rayons ſortent blancs & parallèles aux incidens, & qu'ainſi il réſulte de la démonſtration de M. Klingenſtierna, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ n'eſt pas conſtant. Mais il réſulte de cette même démonſtration que, ſi $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ étoit conſtant, il n'y auroit aucun cas où l'expérience de Newton pût être vraie, & comme on ne ſauroit prouver *à priori*, ſans avoir recours à l'obſervation, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ n'eſt pas conſtant, il s'enſuit qu'il auroit fallu s'aſſurer auparavant par l'expérience qu'il y a des cas

où l'expérience de Newton eſt vraie, ce que M. Klingenſtierna ne paroît pas avoir fait.

5. Il y a plus ; nous avons prouvé (Tom. VI, *Opuſc.* pag. 269, art. 20 & 21, & pag. 287, art. 11) que le paralléliſme de tous les rayons émergens à tous les incidens, c'eſt-à-dire, le paralléliſme de tous les rayons émergens entr'eux, (& par conſéquent la blancheur du rayon émergent) eſt impoſſible, non-ſeulement ſi $\frac{d\mu}{1-\mu} = \frac{dm}{1-m}$, mais encore ſi $\frac{d\mu}{1-\mu}$ eſt $< \frac{dm}{1-m}$. Ainſi pour que l'expérience de Newton ſoit poſſible, même en un ſeul cas, il faut que $\frac{d\mu}{1-\mu}$ ſoit $> \frac{dm}{1-m}$, propoſition qu'on ne peut ſuppoſer vraie ſans le ſecours de l'expérience.

6. On voit bien en effet (Mém. Acad. 1756, pages 384 & 385) que d'après les expériences de M. Dollond, le rayon émergent peut être parallèle à l'incident ſans que la lumiere ſoit blanche au ſortir du priſme, mais on ne voit pas que perſonne ait examiné s'il y a un ſeul cas où le paralléliſme & la blancheur aient lieu à-la-fois.

7. Remarquons encore que ſi la blancheur n'a pas lieu lorſque le rayon émergent eſt parallèle à l'incident, c'eſt qu'il n'y a eu effet qu'un rayon émergent d'une ſeule couleur, qui ſoit parallèle au rayon incident

de la même couleur, & que ce paralléliſme n'a pas lieu pour les autres rayons.

8. Obſervons de plus que la démonſtration même de M. Klingenſtierna n'a lieu, qu'en ſuppoſant la ſeconde loi de Newton vraie, ſavoir, que le rapport des ſinus en paſſant du milieu B dans le milieu C ſoit $\frac{m}{M}$ & $\frac{m'}{M'}$. C'eſt ce qui réſulte évidemment du Tome VI de nos *Opuſc.* pag. 262, art. 4 & 5. Cette ſuppoſition, il eſt vrai, paroît aſſez bien prouvée par les expériences; mais elle ne peut être démontrée *à priori*. Car en ſuppoſant que le rapport des ſinus du milieu A dans le milieu B ſoit $\frac{1}{m}$, il n'eſt pas même rigoureuſement démontré que le rapport des ſinus du milieu B dans le milieu A ſoit $\frac{m}{1}$.

9. En un mot, tout ce que j'ai prétendu, c'eſt que la preuve donnée par M. Klingenſtierna, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ n'eſt pas conſtant, étoit ſeulement hypothétique, & non pas abſolue & rigoureuſe, comme la théorie des lunettes achromatiques exige qu'elle le ſoit; & il me ſemble que mes aſſertions ſur ce ſujet, ſubſiſtent dans leur entier.

10. Ce qui prouve encore, ce me ſemble, que la démonſtration de M. Klingenſtierna contre la prétendue

Digitized by Google

loi de Newton, n'eſt qu'hypothétique, c'eſt, 1°. qu'à la fin de ſon écrit (Voy. Mém. Acad. 1756, pag. 407), il dit que cette loi *paroît mériter* d'être vérifiée de nouveau par des expériences; ce qui prouve qu'il la regardoit, non comme fauſſe, mais comme douteuſe. 2°. Qu'il démontre qu'en ſuppoſant l'expérience de Newton vraie, la loi de Newton a lieu lorſque les réfractions ſont petites, d'où il conclut avec raiſon que ſi l'expérience eſt vraie, l'aberration de réfrangibilité ne pourroit ſe corriger dans les lunettes, *comme Newton l'a prétendu*. Ainſi, d'après les démonſtrations de M. Klingenſtierna, & d'après ſon aveu même, il reſtoit à prouver abſolument & rigoureuſement, ſoit par la théorie, ce qui ne paroît pas facile, ſoit par l'expérience, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{n}-1}$ n'eſt pas $=\frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$, vérité néceſſaire pour la conſtruction des lunettes achromatiques, & bien plus eſſentielle pour la perfection de la Dioptrique, que le paralléliſme ou non paralléliſme des rayons émergens aux incidens, au ſortir d'un priſme placé dans deux différens milieux.

11. Quant à ce que prétendent les défenſeurs de M. Klingenſtierna, qu'il n'a pas ſuppoſé poſſible le paralléliſme des rayons émergens aux incidens, c'eſt une queſtion indifférente à celle dont il s'agit ici, c'eſt-à-dire, à la démonſtration rigoureuſe & abſolue de la

fauſſeté de la loi de Newton. Il paroît par l'écrit anſéré dans les Mém Acad. 1756, que M. Klingenſtierna n'y a pas, au moins formellement, révoqué en doute ce paralléliſme. Mais cet écrit n'eſt, à ce qu'on aſſure, qu'un extrait du Mémoire entier de ce Mathématicien ſur le même objet, imprimé en Suédois dans les Mémoires de l'Académie de Stockolm, pour l'année 1754. Je m'en rapporte donc, ſur la queſtion dont il s'agit, à ceux qui ont lu ce Mémoire en entier.

12. Nous avons dit ci deſſus (art. 1), que ſelon M. Newton, ſi ſon expérience eſt vraie, le rapport des ſinus dans le paſſage de B à C ſera $\frac{m}{M}$ & $\frac{m'}{M'}$. Or cette dernière loi étant admiſe par tous les Opticiens, & l'expérience de Newton n'étant pas vraie, comme M. Dollond l'a démontré (Voyez Mém. Acad. 1756, pag. 385), que deviendra la conſéquence tirée par Newton, ſur le rapport $\frac{m}{M}$ des ſinus, & juſqu'ici reçue en Optique, comme une vérité conſtante? vérité dont nous avons nous-mêmes fait uſage pour démontrer rigoureuſement le théorême de M. Klingenſtierna (*Opuſcules*, Tom. VI, pag. 261, art. 4 & 5).

13. La réponſe eſt que l'expérience de Newton eſt vraie, lorſque les deux faces du priſme ſont paralleles, c'eſt-à-dire, lorſque le priſme eſt ſuppoſé changé en un parallélépipéde, alors les rayons émergens de toutes les couleurs ſont parallèles aux incidens, & delà

delà il eſt aiſé de démontrer la ſeconde loi ſur le rapport $\frac{m}{M}$ des ſinus dans le paſſage de *B* à *C*. C'eſt ce qu'on peut voir dans les *Opuſcules* de Newton, Opuſc. XVIII, *Leçons Optiques*, art. XXXIII.

14. Au reſte, cette démonſtration eſt appuyée ſur une hypothèſe que tous les Opticiens ont admiſe juſqu'ici d'après l'expérience, ſavoir, qu'un rayon qui étant réfracté d'un milieu quelconque dans un autre, revient ſur ſes pas, & repaſſe du ſecond milieu dans le premier, reprend dans ce premier milieu (en ſens contraire) la même direction qu'il avoit quand il eſt entré du premier milieu dans le ſecond. Or delà il eſt aiſé de conclure qu'un rayon, qui tombe ſur un verre plan placé dans l'air ou dans tout autre milieu, en ſortira parallèle à lui-même. S'il y avoit de même pluſieurs milieux *A*, *B*, *C*, &c. placés dans l'air, ou dans tout autre milieu *D*, terminés par des ſurfaces planes parallèles, & non contigus entr'eux, le rayon réfracté dans ces différens milieux ſortiroit encore parallèle à lui-même, puiſqu'à la ſorte de chaque milieu *A*, *B*, *C*, &c. il repaſſeroit dans l'air ou dans le milieu *D*. Mais la ſuppoſition que font les Opticiens ſur la réciprocité des rayons incident & réfracté, ſuppoſition ſur laquelle eſt appuyé le paralléliſme dont nous venons de parler, a beſoin d'être prouvée, comme elle l'eſt en effet, par l'expérience, & ne peut être démontrée rigoureuſement par la théorie, quoique cette ſuppoſition paroiſſe d'ail-

leurs aſſez naturelle. En effet, ſuppoſons, par exemple, que le rapport des ſinus dépende du rapport de denſité des deux milieux, Δ, Δ', & ſoit une fonction de ce rapport, c'eſt-à-dire, $\varphi\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)$; il eſt clair que ſi h eſt le ſinus d'incidence, & h' le ſinus de réfraction, on aura $h' = h\varphi\left(\frac{\Delta}{\Delta}\right)$. Maintenant ſoit h' le ſinus d'incidence du milieu Δ' dans le milieu Δ, on aura le ſinus de réfraction $= h'\varphi\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)$ qui ne peut être égal à h, que dans le cas où $\varphi\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right) \times \varphi\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right) = 1$; c'eſt-à-dire, dans certaines ſuppoſitions ſur la valeur de $\varphi\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)$, par exemple, ſi $\varphi\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right) = \frac{\Delta^m}{\Delta'^m}$, m étant un nombre quelconque.

15. Lorſque les milieux A, B, C, &c. ſont contigus, toujours terminés par des ſurfaces parallèles, & environnés du milieu D, l'expérience alléguée par Newton, prouve encore que dans ce cas le parallélisme a lieu entre le rayon incident & les rayons émergens, comme dans le cas où les milieux A, B, C, &c. ne ſont point contigus. Or delà il eſt aiſé de conclure, ce qui eſt encore aſſez naturel, qu'un rayon qui paſſe d'un milieu A dans un milieu B, immédiatement contigu, ſouffre dans ce milieu B la même réfraction, que s'il paſſoit du milieu A dans le milieu D, & enſuite dans le milieu B. En effet, ſoit h le ſinus d'in-

cidence, mh le ſinus de réfraction dans le milieu A, $m' \times mh$ le ſinus de réfraction du milieu A dans le milieu contigu B, le ſinus de réfraction du milieu B dans l'air, ſera (*hyp.*) $= h = m' \times mh \times \frac{1}{mm'}$, ainſi $\frac{1}{mm'}$ ſera le rapport des ſinus en paſſant du milieu B dans le milieu D, & du milieu D dans le milieu B, ce rapport ſera (art. 14) $= m'm$, or du milieu A dans le milieu D, ce rapport eſt $\frac{1}{m}$, & par conſéquent le ſinus de réfraction mh du milieu D dans le milieu A, deviendroit $mh \times \frac{1}{m} = h$ en repaſſant du milieu A dans le milieu D, donc en paſſant du milieu D dans le milieu B, le ſinus de réfraction ſera $h \times mm'$, comme en paſſant du milieu A dans le milieu B.

16. On peut voir au reſte ſur les loix de la réfraction à travers différens milieux, notre XLIXe Mém. Tom. V de nos *Opuſc.* & ſur-tout le §. VI de ce Mémoire, & les art. 25, 26 & 27; ainſi que les Mém. de l'Acad. de 1767, pag. 97.

§. II.

Conſidérations ſur la Réfraction des rayons dans un ou pluſieurs priſmes.

LES recherches qu'on va lire, ſont en quelque maniere la ſuite du paragraphe précédent. Nous y donnerons la théorie des rayons qui entrent & ſortent parallèles d'un ou de pluſieurs priſmes; théorie peu difficile en elle-même, mais qui nous a conduits à quelques conſtructions aſſez ſimples, & à quelques réſultats qui pourront être utiles.

1 Soit un priſme BAC (Fig. 18) dont l'angle $BAC = 2\alpha$, DF un rayon qui tombe ſur le côté AB, EFG perpendiculaire à AB, l'angle $DFE = k$; le rayon rompu FL, tel que l'angle $GFL = \mathfrak{C}$ & ſin. $\mathfrak{C} = m$ ſin. k, enfin le rayon de nouveau rompu LI, tel que l'angle $HLI = \omega$, & ſin. $\omega = \frac{1}{M}$ ſin. FLK, HLK étant perpendiculaire au côté AC.

2. Il eſt aiſé de voir, en nommant LR parallèle à GFE qu'on aura $FLK = FLR + RLK = LFG + GAF = 2\alpha + \mathfrak{C}$, donc on aura ſin. $\omega = \frac{1}{M}$ ſin. $(2\alpha + \mathfrak{C})$. On ſuppoſe ici, pour plus de généralité, que les côtés AB, AC du priſme, ſont placés dans des milieux

différens B, C; d'où naît la différence des quantités m & M.

3. Maintenant, l'angle k étant le même, ſi on ſuppoſe deux autres quantités m' & M' pour un rayon d'une autre couleur, on aura ſin. $\mathfrak{C}' = m'$ ſin. k; & ſin. $\omega' = \frac{1}{M'}$ ſin. $(2\alpha + \mathfrak{C}')$.

4. Si l'on veut donc que les deux rayons ſortent parallèles, comme on ſuppoſe qu'ils ſont entrés, on aura $\omega = \omega'$, & ſin. $\omega =$ ſin. ω'. Donc $\frac{1}{M}$ ſin. $(2\alpha + \mathfrak{C}) = \frac{1}{M'}$ ſin. $(2\alpha + \mathfrak{C}')$. Donc $\frac{1}{M}$ ſin. 2α cof. $\mathfrak{C} + \frac{1}{M}$ cof. 2α ſin. $\mathfrak{C} = \frac{1}{M'}$ ſin. 2α cof. $\mathfrak{C}' + \frac{1}{M'}$ cof. 2α ſin. $\mathfrak{C}'$, ou en mettant pour ſin. $\mathfrak{C}$ & ſin. $\mathfrak{C}'$ leurs valeurs, m ſin. k, & m' ſin. k, & réduiſant ſin. $2\alpha (M'$ cof. $\mathfrak{C} - M$ cof. $\mathfrak{C}') =$ cof. $2\alpha (Mm' - mM')$ ſin. k.

5. Donc cot. $2\alpha (Mm' - mM') = \frac{M' \text{ cof. } \mathfrak{C}}{\text{ſin. } k} - \frac{M \text{ cof. } \mathfrak{C}'}{\text{ſin. } k} =$ (à cauſe de ſin. $k = \frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}}{m} = \frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}'}{m}$) $M'm$ cot. $\mathfrak{C} - Mm'$ cot. $\mathfrak{C}'$. De plus, les deux équations $\frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}}{m} = \frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}'}{m'}$, donnent $\frac{1}{m\sqrt{(1 + \text{cot. } \mathfrak{C}^2)}} = \frac{1}{m'\sqrt{(1 + \text{cot. } \mathfrak{C}'^2)}}$. Donc ſi on fait cot. $\mathfrak{C} = x$, cot. $\mathfrak{C}' = z$, & cot. $2\alpha = a$, on aura les deux équations $(Mm' - mM')a = M'mx - Mm'z$, & $m\sqrt{(1 + xx)} = m'\sqrt{(1 + zz)}$, d'où l'on tire

$$m^2(1+xx)=m'^2\left[1+\left(\frac{M'ma}{Mm'}-a+\frac{M'ma}{Mm'}\right)^2\right];$$

équation du fecond degré qui donnera deux valeurs de x, & par conſéquent de z.

6. On pourroit tirer de la réſolution de cette équation une valeur de x, qui étant conſtruite géométriquement à l'ordinaire, donneroit la valeur de l'angle ζ, & par conſéquent celle de l'angle ζ'. Mais on peut trouver, comme nous le verrons plus bas, une conſtruction géométrique beaucoup plus ſimple. Cependant, comme x & z ſont ici les cotangentes des angles ζ & ζ', & que ces cotangentes peuvent être données par le calcul de l'équation précédente, nous donnerons ici ce calcul, qui fera trouver les angles ζ & ζ' au moyen des Tables des ſinus, leſquelles renferment auſſi les tangentes & les cotangentes.

7. Nous aurons donc, après les réductions, l'équation

$$xx-\frac{2M'x(Mm'a-M'ma)}{(M'^2-M^2)m}=\frac{M^2}{m^2}\left(\frac{m^2-m'^2}{M'^2-M^2}\right)-\frac{(Mm'a-M'ma)^2}{m^2(M'^2-M^2)},\text{ d'où }x=\frac{M'(\text{cot.}2\alpha)(Mm'-M'm)}{m(M'^2-M^2)}\pm\frac{M}{m}\sqrt{\left(\frac{(\text{cot.}2\alpha)^2(Mm'-M'm)^2}{(M'^2-M^2)^2}+\frac{m^2-m'^2}{M'^2-M^2}\right)}.$$

8. Donc ſi on fait $\frac{\text{cot.}2\alpha(Mm'-M'm)}{M'^2-M^2}=A$ & $\frac{m^2-m'^2}{M'^2-M^2}=\pm B^2$, on aura $x=\frac{M}{m}A\pm\frac{M}{m}\sqrt{(A^2\pm B^2)}$, valeur qu'on peut trouver également,

ou par une conſtruction géométrique, ou par le calcul arithmétique.

9. Si on met dans la valeur de x, m' pour m, M' pour M, & réciproquement, on trouvera la valeur de $z = \frac{MA}{m'} \pm \frac{M}{m}\sqrt{(A^2 \pm B^2)}$, & l'on remarquera que ſi on prend dans la valeur de x le ſigne + au-devant du ſigne radical, il faudra faire la même choſe dans celle de z; dont la raiſon eſt que $M'mx - Mm'z$ doit être $= (Mm' - mM')$ cot. 2α, (art. 5), ce qui ne pourroit pas être, ſi on prenoit les radicaux de ſigne différent dans les valeurs de x & de z.

10. On peut remarquer, en mettant pour cot. $2\alpha^2$ ſa valeur $\frac{1 - \text{ſin}^2 2\alpha^2}{\text{ſin}^2 2\alpha^2}$, que la quantité radicale qui entre dans les valeurs de x & de z, ſe change en $\pm \frac{M}{m(M'^2 - M^2)} \times \frac{\sqrt{[(Mm' - M'm)^2 - \text{ſin}^2 2\alpha^2 (Mm' - Mm)^2]}}{\text{ſin}^2 2\alpha}$.

11. Delà on voit que le problème eſt impoſſible, ſi on a $(\text{ſin. } 2\alpha)^2 > \frac{(Mm' - M'm)^2}{(M'm' - Mm)^2}$; ce qui ſera encore prouvé autrement dans la ſuite.

12. Si les angles 2α, k, ζ, ζ' ſont fort petits, on aura, à très-peu-près, (art. 4) $\frac{1}{M}(2\alpha + mk) = \frac{1}{M'}(2\alpha + m'k)$, ou $2M'\alpha + M'mk = 2M\alpha + Mm'k$, équation qui établit la relation entre α & k, M & M' étant donnés ainſi que m & m'.

13. Si on ſuppoſe de plus $M' = M + dM$, & $m' = m + dm$, on aura $2\alpha dM = (Mm' - M'm)k = (Mdm - mdM)k$. D'où l'on tire $k = \frac{2\alpha dM}{Mdm - mdM}$.

14. Si la quantité $\frac{dM}{Mdm - mdM}$, ou $\frac{dM}{dm} - \frac{M}{m}$ eſt négative, k ſera négatif, c'eſt-à-dire, DF tombera de l'autre côté de FE.

15. Et ſi $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m}$, alors k ſera infini, ce qui eſt impoſſible, & contraire d'ailleurs à la ſuppoſition préſente, que 2α, k, C & C' ſont très-petits.

16. Telles ſont les conſéquences principales qu'on peut tirer de la ſolution algébrique donnée ci-deſſus. Mais on peut trouver de la maniere ſuivante une ſolution beaucoup plus ſimple de ce problême.

17. Puiſque $\frac{\text{ſin. } C'}{\text{ſin. } C} = \frac{m'}{m}$, & $\frac{\text{ſin. } (2\alpha + C')}{\text{ſin. } (2\alpha + C)} = \frac{M'}{M}$, on aura donc, 1°. $\frac{\text{ſin. } C' + \text{ſin. } C}{\text{ſin. } C' - \text{ſin. } C} = \frac{m' + m}{m' - m}$, ou, ce qui revient au même, comme on le ſait par la Trigonométrie, $\frac{\text{tang.}\left(\frac{C+C}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{C-C}{2}\right)} = \frac{m' + m}{m - m}$. Par la même raiſon, on aura, 2°. $\frac{\text{ſin.}(2\alpha + C') + \text{ſin.}(2\alpha + C)}{\text{ſin. } (2\alpha + C') - \text{ſin.}(2\alpha + C)} = \frac{M' + M}{M' - M}$

=

$= \frac{\text{tang}\left(2\alpha+\frac{\zeta'+\zeta}{2}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\zeta'-\zeta}{2}\right)}$, d'où $\frac{\text{tang}\left(\frac{\zeta'-\zeta}{2}\right)}{\text{tang}\left(2\alpha+\frac{\zeta'+\zeta}{2}\right)} = \frac{(m'+m)(M'-M)}{(m'-m)(M+M)}$; ainſi nommant $\frac{\zeta'+\zeta}{2}$, x, on aura $\frac{\text{tang } x}{\text{tang } (2\alpha+x)} = \frac{1}{R}$, 2α & R étant donnés, & en faiſant $\frac{\zeta'-\zeta}{2}=y$, on aura $\frac{\text{tang } x}{\text{tang } y} = \frac{m'+m}{m'-m}$. On remarquera de plus que $R = \frac{M'+M}{M'-M} \times \frac{m-m}{m+m}$.

18. Delà on tire cette conſtruction très-ſimple. Soit menée FP (Fig. 19) perpendiculaire à AG, & ayant pris FL à volonté, ſoit fait FL à $Fi :: R$ 1. Enſuite du diametre Li ſoit décrit un demi-cercle qui coupe FG en K, & ayant joint iK, ſoit tirée FS parallèle à IK, je dis d'abord que l'angle $KFS=x$. Car tirant LKS, l'angle IKL ſera évidemment droit, ainſi que FSL, & on aura SL $KS :: FL$; $Fi :: R$ 1 ; c'eſt-à-dire, $\frac{\text{tang } KFS}{\text{tang } LFS} = \frac{1}{R}$. Or $LFS=PFG+KFS=2\alpha+KFS$. Donc (art. 17) $KFS=x$.

19. On a de plus, à cauſe de $\zeta'+\zeta=2x$, & $\zeta'-\zeta=2y$, $\zeta'=x+y$, $\zeta=x-y$, & tang. $y=\frac{\text{tang } x\,(m'-m)}{m'+m}$. Prenant donc ſur KS & ſur ſon prolongement les deux lignes égales SV, & Su, qui

ſoient $= KS \times \frac{(m'-m)}{m+m}$, & tirant FV & Fu, on aura l'angle $KFV = \mathcal{C}$, & $KFu = \mathcal{C}'$.

20. On peut ſimplifier encore cette conſtruction en trouvant immédiatement, & tout de ſuite, les angles $\mathcal{C}$ & $\mathcal{C}'$, ſans avoir beſoin de l'angle x. Pour cela, on conſidérera, 1°. que tang. x tang. $(2\alpha + x) :: \frac{m'+m}{m-m}$ $\frac{M'+M}{M'-M}$ (art. 17); d'où il s'enſuit que $\frac{m'+m}{m'-m}$: $\frac{M+M}{M-M} :: KS : LS :: Fi : FL$. 2°. Que tang. $y =$ (art. 19) tang. $x \times \frac{m'-m}{m'+m}$; d'où il s'enſuit que $m'+m$: $m'-m ::$ ou $\frac{m'+m}{m'-m} : 1 ::$ tang. x : tang. $y : KS : SV :$ $Fi : Fn$, en menant Vn parallèle à Ki & FS, c'eſt-à-dire, perpendiculaire à LS. Donc les lignes FL, Fi, Fn ſont entr'elles comme $\frac{M'+M}{M'-M}$, $\frac{m'+m}{m'-m}$, 1.

21. Donc prenant Fn à volonté pour l'unité, $Fi = \frac{m'+m}{m'-m}$, $FL = \frac{M+M}{M'-M}$, décrivant du diametre Li un cercle qui coupe FK en K, & du diametre Ln un ſecond cercle, & joignant enſuite LK qui coupe le ſecond cercle en V, la ligne FV donnera l'angle $KFV = \mathcal{C}$. On trouvera l'angle $KFu = \mathcal{C}'$ par une conſtruction ſemblable, en prenant ſur LF prolongée,

$Fn' = Fn$, & décrivant du diametre Ln' un cercle qui coupe LK en u.

22. On voit évidemment que le problême eſt impoſſible, ſi le cercle décrit du diametre Li n'atteint pas la ligne FK, ce qui arrivera ſi en diviſant Li en deux également au point Z, & menant la perpendiculaire ZO à FK, on a $LZ < ZO$, c'eſt-à-dire, $\frac{LF-Fi}{2} <$ ſin. $2\alpha \times FZ$. Donc ſi on a $\frac{R-1}{2} <$ ſin. $2\alpha \times \left(1 + \frac{R-1}{2}\right)$, ou $\frac{R-1}{R+1} <$ ſin. 2α, le problême eſt impoſſible.

23. Et comme $R = \frac{M'+M}{M-M} \times \frac{m'-m}{m+m}$, on aura $R-1 = \frac{2Mm'-2mM'}{(M'-M)(m'+m)}$, & $R+1 = \frac{2M'm'-2Mm}{(M'-M)(m'+m)}$, d'où il s'enſuit que le problême ſera impoſſible, ſi on a ſin. $2\alpha > \frac{Mm'-M'm}{Mm-Mm}$, ce qui s'accorde avec l'article 11 ci-deſſus.

24. On voit auſſi que ſi le demi-cercle dont il s'agit, atteint la ligne FK, il la coupera en deux points, ou la touchera en un ſeul, & que dans le premier cas il y aura deux ſolutions, dans le ſecond, une ſeule, ſavoir, lorſque ſin. $2\alpha = \frac{R-1}{R+1}$.

25. On ſe ſouviendra de plus que x ayant deux valeurs (art. 18), y a deux valeurs auſſi, correſpondantes

à chaque valeur de x, & telles que tang. $y = \frac{(m - m \text{ tang } x}{n + n}$.

26. Il faut remarquer que les angles C & C' doivent l'un & l'autre être $< 90°$. Autrement il eſt viſible que, ſi le rayon incident DF étoit ſitué comme dans la Fig. 18, c'eſt-à-dire, dans l'angle EFA, alors le rayon réfracté FL n'arriveroit plus au côté AC, & ſi le rayon incident DF étoit ſitué dans l'angle EFB, le rayon réfracte ſortiroit du priſme, ou tout au plus tomberoit ſur FA, & ne pourroit de nouveau ſe réfracter.

27. Donc puiſque C & C' ſont néceſſairement l'un & l'autre plus petits que $90°$, on aura x, ou $\frac{C+C'}{2} < 90°$.

28. De plus, comme il eſt néceſſaire pour la ſolution que les lignes ou rayons rompus FL, FL' parviennent (Fig. 20) au côté AC du priſme, il eſt clair que $90° - C$ & $90° - C'$, doit être $> 2\alpha$. Donc auſſi $180° - C - C'$, ou $180° - 2x > 4\alpha$.

29. Dans la ſolution générale précédente, nous ſuppoſons que les quantités R ou $\frac{(M'+M)(m-m)}{(m'+m)(M'-M)}$, $\frac{m+m'}{m'-m}$, $\frac{M+M}{M-M}$, ſoient toutes poſitives, c'eſt-à-dire, que M' ſoit $> M$ & $m' > m$. Si $\frac{m+m'}{m'-m}$, ou $\frac{M+M'}{M-M}$ étoit négative, c'eſt-à-dire, ſi m' étoit $< m$, ou $M' < M$, il faudroit prendre (Fig. 19) Fi ou FL, ſur LF

prolongée vers F, la ligne Fn qui repréſente l'unité reſtant toujours invariable.

30. L'angle FAG du priſme étant ſuppoſé aigu, il eſt aiſé de voir que ſi les valeurs de Fi & FL ſont de différens ſignes, alors le point F ſe trouvera néceſſairement entre les points L & i, & le cercle décrit du diametre Li coupera néceſſairement FK en quelque point, en ſorte qu'il ſera toujours poſſible de réſoudre le problême, c'eſt-à-dire, de déterminer les angles $\mathcal{C}'$ & $\mathcal{C}$, par les conditions qui donnent les valeurs de x & de y.

31. Mais outre ces conditions néceſſaires à la ſolution du problême, il en eſt encore d'autres qui doivent encore avoir lieu, & qui réſultent des équations du problême (art. 1, 2 & 3).

32. En effet, puiſque $\text{ſin. } k = \frac{\text{ſin. } \mathcal{C}}{m} = \frac{\text{ſin. } \mathcal{C}'}{m'}$, il eſt clair que chacune de ces deux dernieres quantités doit être la même, & que de plus elles ne doivent pas être > 1, ſin. k ne pouvant être > 1.

33. Donc ſin. $\mathcal{C}$ ne doit pas être $> m$, & ſin. $\mathcal{C}'$ ne doit pas être $> m'$.

34. Il faut de même que chacune des quantités $\frac{1}{M}$ ſin. $(2\alpha + \mathcal{C})$, & $\frac{1}{M'}$ ſin. $(2\alpha + \mathcal{C}')$, qui repréſentent les ſinus de la ſeconde réfraction au ſortir du priſme, ne ſoient pas plus grandes que le ſinus total.

35. Il faut même que $\frac{1}{M}$ fin. $(2\alpha+\mathfrak{C})$, & $\frac{1}{M'}$ fin. $(2\alpha+\mathfrak{C}')$, ainſi que $\frac{\text{fin. }\mathfrak{C}}{m}$ & $\frac{\text{fin. }\mathfrak{C}'}{m'}$ ſoient l'un & l'autre <1; par la raiſon que ſi ces quantités étoient égales à 1, les rayons émergens ou les incidens raſeroient la ſurface du priſme, ce qu'on ne peut ſuppoſer dans l'expérience dont il s'agit.

36. Donc fin. $(2\alpha+\mathfrak{C}')$ doit être $<M'$ & fin. $(2\alpha+\mathfrak{C})$ $<M$, & de même fin. $\mathfrak{C}$ doit être $<m$, & fin. $\mathfrak{C}'<m'$.

37. Quand donc on aura trouvé une ſolution qui ſatisfaſſe aux deux équations $\frac{\text{fin. }\mathfrak{C}}{m}=\frac{\text{fin. }\mathfrak{C}'}{m'}$, & $\frac{\text{fin. }(2\alpha+\mathfrak{C})}{M}=\frac{\text{fin }(2\alpha+\mathfrak{C}')}{M'}$, c'eſt-à-dire, aux équations $\frac{\text{tang. }\alpha}{\text{tang. }(2\alpha+\alpha)}=\frac{1}{R}$, & tang. $y=\frac{\text{tang }\alpha(m'-m)}{m'+m}$, il faudra encore que cette ſolution ſatisfaſſe aux conditions $\frac{\text{fin }\mathfrak{C}}{m}<1$, $\frac{\text{fin }\mathfrak{C}'}{m'}<1$, $\frac{\text{fin.}(2\alpha+\mathfrak{C})}{M}<1$, $\frac{\text{fin.}(2\alpha+\mathfrak{C}')}{M'}$ <1.

38. Or ces conditions pourroient n'être pas remplies, quoique les conditions de x & de y le fuſſent. Car dans les valeurs de tang. x, & de tang. y, diminuons m' & m proportionnellement, ainſi que M' & M, les valeurs de x & de y reſteront évidemment les mêmes, au lieu que celles de $\frac{\text{fin. }\mathfrak{C}}{m}$, $\frac{\text{fin }\mathfrak{C}'}{m'}$, &c. pourront augmenter juſqu'à être >1.

39. Pour rendre ceci encore plus ſenſible, ſuppoſons (Fig. 20) que DF ſoit le rayon incident, & tirons à volonté les lignes FL, FL', & enſuite $L'I'$, LI parallèles entr'elles. Il eſt clair que ſi m, m', M, M' avoient entr'elles la relation qui répond aux angles rompus GFL, GFL', FLI, $FL'I'$, le problême ſeroit poſſible. Maintenant (les angles $GFL(\mathcal{C})$, & $GFL'(\mathcal{C}')$ demeurant les mêmes) augmentons ou diminuons m & m' proportionnellement, ainſi que M & M', la ſolution pourra ceſſer d'être poſſible, quoiqu'on ait les mêmes valeurs de tang. x & de tang. y.

40. Nous ſuppoſons dans cette ſolution générale $\mathcal{C}' < \mathcal{C}$, afin que $\frac{\mathcal{C}'-\mathcal{C}}{2}$, ou y ſoit poſitive; de plus nous ſuppoſerons toujours que $\mathcal{C}$ ſoit l'angle qui convient aux rayons violets, & $\mathcal{C}'$ celui qui convient aux rayons rouges, & comme les rayons violets ſont plus réfrangibles que les rouges, il s'enſuit que pour que $\mathcal{C}'$ ſoit plus grand que $\mathcal{C}$, & par conſéquent $m' > m$, il faut que m' & m ſoient l'un & l'autre moindres que l'unité.

41. Donc puiſque les angles d'incidence $2\alpha+\mathcal{C}'$, $2\alpha+\mathcal{C}$ ſont & doivent être l'un & l'autre moindres que $90°$, il eſt clair que, $\mathcal{C}'$ étant (*hyp.*) $> \mathcal{C}$, ſin. $(2\alpha+\mathcal{C}')$ eſt $>$ ſin. $(2\alpha+\mathcal{C})$, & que par conſéquent $M' > M$, à cauſe de $\frac{\text{ſin. }(2\alpha+\mathcal{C}')}{M'} = \frac{\text{ſin }(2\alpha+\mathcal{C})}{M}$.

42. Donc M' & M doivent être plus petits que

l'unité, afin que la réfraction des rayons rouges (auxquels appartient l'angle d'incidence $2\alpha+\mathfrak{C}'$) en ſortant du priſme, ſoit moindre que celle des rayons violets, auxquels appartient l'angle d'incidence $2\alpha+\mathfrak{C}$.

43. Tout cela eſt fondé ſur ce que dans le cas où la réfraction ſe fait en s'approchant de la perpendiculaire, c'eſt à dire, où m & m ſont <1, le ſinus des rayons rouges réfractés doit être plus grand que celui des rayons violets, afin que l'écart ſoit moindre dans les premiers que dans les ſeconds. D'où il réſulte que m' eſt $>m$. C'eſt le contraire quand la réfraction ſe fait en s'éloignant de la perpendiculaire, c'eſt-à-dire, où $\frac{1}{M}$ & $\frac{1}{M'}$, ſont >1, car alors, & par la même raiſon, le ſinus des rayons rouges réfractés doit être moindre que celui des rayons violets; d'où l'on tire $\frac{1}{M'}<\frac{1}{M}$, & $M'>M$.

44. La ſuppoſition que nous avons faite de m & M plus petites que l'unité, ainſi que m' & M', eſt la plus naturelle pour appliquer les calculs précédens aux expériences du priſme placé dans deux milieux B, C, plus rares que lui, car au paſſage du milieu B dans le priſme, que nous ſuppoſons repréſenter le milieu A (§. 1, art. 1), m eſt <1, ainſi que M, puiſque la réfraction du milieu B dans le priſme ſe fait en s'approchant de la perpendiculaire, & que la réfraction du priſme dans le milieu C ſe fait en s'en éloignant, ce qui donne $\frac{1}{M}>1$, & $M<1$.

45.

45. Nous ſuppoſons encore ici que ſi m eſt < 1, m' ſera plus petit que 1, & réciproquement ſi m eſt > 1, m' ſera plus grand que 1, & qu'il en ſera de même de M par rapport à M'. Cette ſuppoſition eſt légitime, car ſi des rayons d'une couleur ſe briſent en s'approchant ou en s'éloignant de la perpendiculaire, il en ſera de même des rayons d'une autre couleur quelconque.

46. Suppoſant toujours que $\mathfrak{C}'$ ſoit l'angle qui convient aux rayons rouges, c'eſt-à-dire, aux rayons les moins réfrangibles, & $\mathfrak{C}$ celui qui convient aux rayons violets, c'eſt-à-dire, aux plus réfrangibles, il eſt clair que ſi m' & m ſont plus grands que l'unité, on aura $m' < m$, & par conſéquent $\mathfrak{C}' < \mathfrak{C}$, à cauſe de $\frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}'}{m'} = \frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}}{m}$, & dans ce même cas les rayons rouges qui donnent l'angle $2\alpha + \mathfrak{C}'$ devant être moins réfractés au ſortir du priſme, que les rayons violets, on aura (à cauſe de $\frac{\text{ſin. } (2\alpha+\mathfrak{C}')}{M} = \frac{\text{ſin } (2\alpha+\mathfrak{C})}{M}$, $M' < M$, & par conſéquent M' & $M > 1$.

47. Donc ſi m' eſt $\gtrless m$, on aura auſſi toujours $M' \gtrless M$, & par conſéquent $m' - m$, & $M' - M$ ſeront toujours de même ſigne, au moins tant que $\mathfrak{C}'$ & $\mathfrak{C}$ ſeront poſitifs.

48. Au contraire, ſi $\mathfrak{C}'$ & $\mathfrak{C}$ ſont négatifs, ce qui

rend néceſſairement k négatif, c'eſt-à-dire, fait tomber le rayon incident DF dans l'angle EFB, & que m' ainſi que m ſoient <1, ce qui donne $m'>m$, & $\mathfrak{C}'>\mathfrak{C}$, alors $\frac{\text{ſin.}(2\alpha+\mathfrak{C}')}{M'} = \frac{\text{ſin}(2\alpha+\mathfrak{C})}{M}$, ou plutôt $\frac{\text{ſin.}(2\alpha-\mathfrak{C}')}{M'} = \frac{\text{ſin}(2\alpha-\mathfrak{C})}{M}$ donnera $M'<M$. Or les rayons rouges qui donnent l'angle d'incidence $2\alpha+\mathfrak{C}'$, ou plutôt $2\alpha-\mathfrak{C}'$, devant être moins réfractés que les rayons violets qui donnent l'angle $2\alpha-\mathfrak{C}$, il faut néceſſairement que M' & M ſoient tous deux >1.

49. Ce ſera le contraire ſi $\mathfrak{C}'$ eſt $<\mathfrak{C}$, ce qui donne $m'<m$, m' & $m>1$, $M'>M$, M' & $M<1$.

50. On voit auſſi que les angles $\mathfrak{C}'$ & $\mathfrak{C}$ doivent être tous deux de même ſigne, c'eſt-à dire, tous deux poſitifs ou négatifs, puiſque par les loix de la réfraction, l'un ne ſauroit être d'un côté de la perpendiculaire FG, & l'autre de l'autre côté.

51. Il faut bien remarquer que quand on conclut de $\mathfrak{C}' \gtrless \mathfrak{C}$, que m' eſt $\gtrless m$, on ſuppoſe que les angles $\mathfrak{C}'$ & $\mathfrak{C}$ aient le ſigne $+$, ſoit qu'ils tombent (Fig. 18) dans l'angle BFG, ou dans l'angle AFG. Car ſi on ſuppoſoit en général $\mathfrak{C}'>$ ou $<\mathfrak{C}$, ſans avoir égard au ſigne, il eſt clair que quand $\mathfrak{C}'$ ſeroit négatif, on auroit (en faiſant $\mathfrak{C}'=-\zeta'$, & $\mathfrak{C}=-\zeta$) $-\zeta' \gtrless -\zeta$,

d'où $\zeta' \gtrless \zeta$, & $\sin. \zeta' \gtrless \sin. \zeta$, & (à cauſe de $\frac{\sin. \zeta'}{m'} = \frac{\sin. \zeta}{m}$), $m' \lessgtr m$.

52. Dans le cas où m' eſt $< m$, & $M' < M$, les lignes Fi & FL doivent être l'une & l'autre de ſigne contraire (Fig. 19) à la ligne Fn que l'on prend pour l'unité, & le rapport de Fi à FL doit être celui de $\frac{(m'+m)(M'-M)}{(m-m)(M+M)}$ à l'unité, rapport dont la valeur eſt poſitive. Ainſi pour appliquer ici plus aiſément la conſtruction générale de l'art. 18, il faut prendre l'unité Fn négative & Fn' poſitive.

53. Par ce moyen, l'angle $\mathcal{C}'$ ou KFu ſera $<$ l'angle $\mathcal{C}$ ou KFV, comme cela doit être dans le cas de $m' < m$ & de $M' < M$ (art. 49).

54. Lorſque $\mathcal{C}'$ & $\mathcal{C}$ ſont poſitifs, c'eſt-à-dire, placés dans l'angle GFB, 2α ne ſauroit être ni égal, ni $> 90°$, car $90° - \mathcal{C}$, & $90° - \mathcal{C}'$ ne pourroient être alors $> 2\alpha$, comme cela eſt néceſſaire (art. 28), ce qu'il eſt aiſé de voir d'ailleurs par la ſimple inſpection de la figure; puiſque ſi l'angle BAC du priſme étoit droit ou obtus, le rayon rompu FL ne pourroit arriver au côté AC.

55. On remarquera que x étant poſitive, & $< 90°$, comme elle le doit toujours être, puiſque $\mathcal{C}'$ & $\mathcal{C}$ ſont chacun plus petits que $90°$, l'angle $2\alpha + x$ ne ſauroit être $> 90°$, ni par conſéquent tang. $(2\alpha + x)$ négative; car ſi $2\alpha + x$ ou $2\alpha + \frac{\mathcal{C}'+\mathcal{C}}{2}$ étoit $> 90°$;

Digitized by Google

il faudroit qu'au moins un des deux angles $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}$, par exemple, $\mathfrak{C}$ fût tel que $2\alpha+\mathfrak{C}'$ fût $>90°$. Or nous avons vu (art. 28) que cela ne sauroit être.

56. C'est ce qu'on peut encore prouver directement, en considérant que si $\mathfrak{C}'$ & $\mathfrak{C}$ sont positifs, $m'-m$ & $M'-M$ seront de même signe, que par conséquent (art 52) Fi & FL seront positives l'une & l'autre, & que l'angle LFS formé par FL & par la perpendiculaire FS à LK, sera $<90°$. Or cet angle $LFS = 2\alpha+x$, donc, &c.

57. En supposant $\mathfrak{C}'$ & $\mathfrak{C}$ négatifs, c'est-à-dire, placés dans l'angle AFG, (& par conséquent le rayon incident DF placé dans l'angle EFB) il peut arriver que $\mathfrak{C}'$ & $\mathfrak{C}$ soient $>2\alpha$, auquel cas on aura $\mathfrak{C}'-2\alpha$, & $\mathfrak{C}-2\alpha$, pour les angles d'incidence au-dedans du prisme. Pour lors si $\mathfrak{C}'$ est $>\mathfrak{C}$, on aura $m'>m$, & m', m chacun plus petits que l'unité, on aura de même (à cause de $\frac{\text{fin.}(\mathfrak{C}'-2\alpha)}{M} = \frac{\text{fin.}(\mathfrak{C}-2\alpha)}{M}$) $M'>M$, & à cause que M' appartient aux rayons rouges, c'est-à-dire, aux moins réfrangibles, & M aux violets, c'est-à-dire, aux plus réfrangibles, on aura M' & $M<1$.

58. Supposons maintenant que $\mathfrak{C}'$ & $\mathfrak{C}$ soient négatifs, & $<2\alpha$, on aura $\frac{\text{fin. }\mathfrak{C}'}{m} = \frac{\text{fin. }\mathfrak{C}}{m}$, ou $\frac{\text{tang. }x}{\text{tang. }y} = \frac{m+m}{m-m}$; & $\frac{\text{fin.}(2\alpha-\mathfrak{C}')}{M} = \frac{\text{fin.}(2\alpha-\mathfrak{C})}{M}$, ou

$$\frac{\text{tang}\left(2\alpha-\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{C}'}{2}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{C}'}{2}\right)}=\left(\frac{\text{tang } x}{\text{tang } -y}\right)=\frac{M'+M}{M-M},$$

59. On fera ſur ce cas des remarques analogues aux précédentes, en ſuppoſant $\mathfrak{C}'>$, ou $<\mathfrak{C}$, & on remarquera qu'ici Fi & FL ſont de différens ſignes; c'eſt ſur quoi nous ne nous arrêterons pas davantage.

60. Nous remarquerons ſeulement que dans le cas ou les angles d'incidence FLK (Fig. 21) ſeroient l'un $2\alpha-\mathfrak{C}$, l'autre $\mathfrak{C}'-2\alpha$, c'eſt à-dire, où les deux rayons rompus FL, FL', tomberoient de différens côtés de la perpendiculaire FZ, alors les rayons rompus au ſortir du priſme, ſeroient néceſſairement divergens, quand même on auroit $\frac{\text{ſin. } FLK}{m}=\frac{\text{ſin } FLK'}{m'}$, parce que les rayons rompus ne tomberoient pas du même côté par rapport à la perpendiculaire; ainſi la ſolution ſeroit impoſſible réellement, quoiqu'il pût arriver que non ſeulement les quantités $\frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}}{m}$ & $\frac{\text{ſin } \mathfrak{C}'}{m}$ fuſſent égales, mais encore les quantités $\frac{1}{M}$ ſin. $(2\alpha-\mathfrak{C})$ & $\frac{1}{M'}$ ſin. $(2\alpha-\mathfrak{C}')$. Il eſt vrai que ces deux dernieres quantités ſe trouveroient alors de différens ſignes, $2\alpha-\mathfrak{C}'$ étant négatif (*hyp.*), ce qui indiqueroit ſuffiſamment l'impoſſibilité du paralléliſme des rayons au ſortir du priſme.

61. Si 2α eſt $=$ ou $>90°$, alors les angles d'incidence au-dedans du priſme, ſeront néceſſairement $2\alpha-\mathcal{C}'$ & $2\alpha-\mathcal{C}$, car nous avons vu ci-deſſus (art. 54) que dans ce cas les angles $\mathcal{C}'$ & $\mathcal{C}$ ne peuvent être placés dans l'angle GFB, mais dans l'angle AFG.

62. Dans le cas où les angles d'incidence ſur le côté AG du priſme, ſont $2\alpha-\mathcal{C}'$ & $2\alpha-\mathcal{C}$, l'angle 2α peut être droit ou obtus ; mais il faut alors, pour que les rayons arrivent au côté AG, & par conſéquent pour que le problême ſoit poſſible, que $90°+\mathcal{C}$ & $90°+\mathcal{C}'$ ſoient $>2\alpha$, comme il eſt aiſé de le voir; donc $2\alpha-\mathcal{C}$ & $2\alpha-\mathcal{C}$ doivent être $<90°$, ainſi que $2\alpha-x$.

63. Donc ſi l'angle A ou 2α eſt droit, les rayons parviendront toujours à la ſurface AG du priſme, puiſqu'alors $90°+\mathcal{C}'$ & $90+\mathcal{C}$ ſeront évidemment $>2\alpha=90°$. Il n'y auroit d'excepté que le cas de $\mathcal{C}'=0$, & de $\mathcal{C}=0$, qui donneroit $k=0$, c'eſt-à-dire, le rayon incident DF perpendiculaire à AF.

64. Enfin, lorſque $\mathcal{C}'$ & $\mathcal{C}$ ſont négatifs & $>2\alpha$, on aura les équations $\frac{\text{tang } x}{\text{tang } y}=\frac{m+m'}{m'-m}$, & $\frac{\text{tang } (x-2\alpha)}{\text{tang } y}=\frac{M+M}{M-M}$, d'où l'on tirera encore une conſtruction analogue à celle des art. 17 & 18.

65. Dans la même hypothèſe de $\mathcal{C}'$ & $\mathcal{C}>2\alpha$, il eſt clair que ſi $\mathcal{C}'$ eſt $<\mathcal{C}$, on aura $m'<m$, $M'<M$, & m', m, ainſi que M' & $M>1$.

66. Puiſque $\frac{\text{tang. } (2\alpha+x)}{\text{tang. } x} = R$, & que $2\alpha+x$, ainſi que x, eſt toujours $<90°$, il eſt clair, 1°. que ſi R eſt poſitif & >1, on aura tang. $(2\alpha+x)>$ tang. x. 2°. Que ſi R eſt négatif, on aura tang. $(2\alpha+x)$ poſitive, ſi x eſt négatif, & par conſéquent $2\alpha>\mathcal{C}$ & $>\mathcal{C}'$, & que dans ce cas x ne peut être poſitif, puiſqu'alors tang. $(2\alpha+x)$ ſeroit négative, & $(2\alpha+x)>90°$, ce qui eſt impoſſible. 3°. Enfin, que ſi R eſt poſitif & plus petit que l'unité, on aura tang. $(2\alpha+x)<$ tang. x, ce qui donne x négative, & $>2\alpha$, ou $\mathcal{C}$ & $\mathcal{C}'$ négatifs, & $>2\alpha$.

67. Donc ſi R eſt poſitif & >1, & que ſin. 2α ne ſoit pas $>\frac{R-1}{R+1}$, on aura la premiere ſolution, qui donne x poſitif. Si R eſt négatif, on aura la ſeconde ſolution, qui donne x négatif & $<2\alpha$, & la ſolution ſera toujours poſſible Enfin, ſi R eſt poſitif & <1, on aura x négatif & $>2\alpha$, pourvu que ſin. 2α ne ſoit pas $>\frac{1-R}{1+R}$.

68. La condition de R poſitif, donne $M'>M$ & $m'>m$, ou $M'<M$ & $m'<m$, & celle de $R>$ ou <1 donne $\frac{M+M'}{M'-M} \gtrless \frac{m'+m}{m'-m}$, ou $\frac{M+M'}{M-M'} \gtrless \frac{m'+m}{m-m'}$; donc dans le premier cas $Mm'+M'm'-Mm-M'm \gtrless M'm'+M'm-Mm'-Mm$, ou

$Mm' \gtrless M'm$, c'eſt-à-dire, $\frac{M}{M'} \gtrless \frac{m}{m'}$, & dans le ſecond cas $-Mm' \gtrless -M'm$, ou $\frac{m}{m'} \gtrless \frac{M}{M}$.

69. Si $\frac{m}{m} = \frac{M}{M}$, il eſt aiſé de voir que $\frac{M+M'}{M-M} = \frac{m+m'}{m'-m}$, qu'ainſi tang. x = tang. $(2\alpha + x)$, que les points I, L ſe confondent, & que le problême (art. 22) eſt impoſſible.

70. En général & dans tous les cas, le point eſſentiel pour la ſolution de ce problême, c'eſt que les rayons FL, FL' (Fig. 21) arrivent à la ſurface AG du priſme, car s'ils y arrivent, on peut aiſément imaginer des loix de réfraction (c'eſt-à-dire, des valeurs de M & M') qui rendront parallèles les rayons émergens LI, $L'I$.

71. L'équation $\frac{\text{tang } (2\alpha + x)}{\text{tang } x} = \frac{1}{R}$, donne non-ſeulement la valeur de x, celle de 2α étant donnée, mais encore la valeur de 2α, x étant ſuppoſée donnée, & cette valeur ſe trouvera par l'équation

$\frac{\text{ſin. } 2\alpha \text{ coſ } x + \text{ſin } x \text{ coſ } 2\alpha}{\text{coſ } 2\alpha \text{ coſ } x - \text{ſin. } x \text{ ſin } 2\alpha} = \frac{\text{tang } x}{R}$, ou (en diviſant le haut & le bas du premier membre par coſ. 2α coſ. x) $\frac{\text{tang } 2\alpha + \text{tang } x}{1 - \text{tang } x \text{ tang. } 2\alpha} = \frac{\text{tang } x}{R}$; d'où l'on tire aiſément la valeur de tang. 2α.

72. Dans ce cas l'angle $KFS = x$ eſt donné dans la

la Fig. 19, & la position de FL est inconnue; pour la trouver, on prendra sur SKL perpendiculaire à FS, la ligne $SL = \frac{SK \times 1}{R}$; & on remarquera de plus que VS doit toujours être à SK : $m' - m$ est à $m' + m$. D'où l'on connoîtra l'angle $AFP = 2z = KFL$, & la position des deux rayons réfractés FV, Fu.

73. Les solutions précédentes ne sont que pour deux rayons. S'il y en avoit un plus grand nombre, par exemple, trois, & que le rapport des sinus fût m, m', m'', & $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{M'}$, $\frac{1}{M''}$, il faudroit alors deux solutions pour chacun des rayons pris deux à deux, & il faudroit de plus que les résultats de ces deux solutions s'accordassent, c'est-à dire, qu'en nommant x la demi-somme des angles $\mathcal{C}$ & $\mathcal{C}'$, y leur demi-différence, x' la demi-somme des angles $\mathcal{C}$ & $\mathcal{C}''$, & y' leur demi-différence, les quantités $x - y$ & $x' - y'$ qui expriment l'angle $\mathcal{C}$ fussent les mêmes de part & d'autre, ainsi que les quantités $x + y$, & $x' + y'$ qui expriment les angles $\mathcal{C}'$ & $\mathcal{C}''$.

74. Supposons, pour plus de simplicité, que le rayon incident DF se partage en entrant dans le prisme, en plusieurs rayons de nombre pair, & faisant tous entr'eux des angles égaux, alors il est clair, 1°. que la demi-somme x des deux angles extrêmes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, sera aussi celle de deux angles également éloignés des deux

extrêmes; que la demi-différence y doit ſuivre une progreſſion arithmétique, dont le plus grand terme ſera celui qui répond aux deux angles extrêmes. Donc les valeurs de m, m', M, M', doivent être telles pour chaque valeur de x & de y; 1°. que la valeur de x demeure la même; 2°. que les valeurs de y ſoient en progreſſion arithmétique.

75. Suppoſons $M'-M=dM$, & $m'-m=dm$, on aura $\frac{\text{tang } x}{\text{tang } (x+y)}$ = à très-peu près $\frac{m\,dM}{M\,dm}$, & tang. y $=\frac{dm \text{ tang. } x}{2m}$. Il faut donc que $\frac{dM}{dm}$ ſoit la même pour chaque paire d'angles.

76. Il faut de plus remarquer qu'on néglige ici le terme qui donneroit $dm\,dM$, & qu'on ſuppoſe tang $y=y$, à cauſe que y eſt fort petit. Ainſi la ſolution n'eſt qu'approchée, mais elle ſuffit pour notre objet, parce qu'il ne s'agit pas ici d'une préciſion abſolument géométrique. Sur quoi voyez le Tome III de nos *Opuſcules*, pag. 320 & ſuiv.

77. Un Mathématicien qui a traité cette même matière, m'accuſe d'avoir dit qu'*il étoit néceſſaire* que les quantités dm, dm', dm'', &c. ainſi que dM, dM', dM'' &c. *fuſſent en progreſſion arithmétique*, pour que tous les rayons à-la-fois ſortiſſent parallèles, & pour la parfaite deſtruction des couleurs, tant dans le priſme que dans les lentilles achromatiques; & il obſerve avec raiſon que cette condition *de la progreſſion arithmétique* n'eſt

pas abſolument néceſſaire. Il a ſeulement oublié de citer en entier ma propoſition, qui exige que les quantités ſoient en progreſſion arithmétique, *ou* que *les différences d m, d M*, &c. *ſoient en raiſon conſtante.* Voyez l'ouvrage & l'endroit cité, Tom. III de mes *Opuſc.* art. 781. Je n'ai donc pas dit que la progreſſion arithmétique fût ici abſolument néceſſaire, comme le critique l'a ſuppoſé.

78. M. Lexell, ſavant Géomètre de Peterſbourg, m'a communiqué une autre conſtruction très élégante du problême de l'art. 17, conſtruction qu'on peut démontrer en cette ſorte; puiſque $\frac{\text{tang.}(2\alpha+x)}{\text{tang. } x} = R$, on aura donc l'équation $\frac{\text{ſin.}(2\alpha+x)\text{ cof. } x}{\text{cof.}(2\alpha+x)\text{ ſin. } x} = R$, d'où $\frac{R+1}{R-1} = \text{ſin.}(2\alpha+x)\text{ cof. } x + \text{ſin. } x\text{ cof.}(2\alpha+x)$: $\text{ſin.}(2\alpha+x)\text{ cof. } x - \text{ſin. } x\text{ cof.}(2\alpha+x) = \frac{\text{ſin.}(2\alpha+2x)}{\text{ſin. } 2\alpha}$. Tout ſe réduit donc, l'angle $FAL = 2\alpha$ (Fig. 22) étant donné, à faire en ſorte que $\frac{FL}{AL} = \frac{R-1}{R+1}$; car il eſt clair qu'alors l'angle AFL ſera $= 2\alpha + 2x$; puiſque $\frac{\text{ſin } AFL}{\text{ſin } FAL} = \frac{AL}{FL}$.

79. Pour trouver la poſition de FL, telle que $\frac{FL}{AL} = \frac{R-1}{R+1}$, il n'y a qu'à tracer d'un point L quelconque

de la ligne AL comme centre, un arc de cercle du rayon $\frac{AL\times(R-1)}{R+1}$, lequel coupera la ligne AFZ en quelque point F.

80. On voit clairement que ſi le problême eſt poſſible, le cercle décrit du rayon LF coupera la ligne AF en deux points F, F, ou du moins la touchera quand ces deux points ſe réuniront, il eſt clair auſſi que le problême ſera impoſſible, ſi on a $\frac{(R+1)^2 \text{ſin. } 2\alpha^2}{(R-1)^2} > 1$; puiſqu'alors ſin. $(2\alpha+2x)^2$ ſeroit >1, & que d'ailleurs LF qui eſt $=\frac{AL(R-1)}{R+1}$ ſeroit $<LR=AL$ ſin. 2α, d'où il eſt évident que l'arc décrit du rayon $\frac{AL(R-1)}{R+1}$ ne pourroit couper la ligne AZ.

81. Dans le cas où $\frac{(R+1)^2}{(R-1)^2}$ ſin. $2\alpha^2=1$, alors les points F, F ſe confondent, & le cercle décrit touche la ligne AF.

82. Puiſque $R=$ (art. 17) $\frac{(M'+M)(m'-m)}{(M'-M)(m'+m)}$, il eſt aiſé de voir que $R-1=2Mm'-2M'm$ & $R+1=2M'm'-2Mm$, d'où la condition de ſin. $2\alpha^2 \geq \frac{(R-1)^2}{(R+1)^2}$ eſt la même que celle de l'art. 11.

83. Comme tout ſinus répond à deux angles complémens l'un de l'autre à 180°, il eſt clair que pour

chacun des deux points F, on aura deux valeurs de $2\alpha + 2x$, complémens l'une de l'autre à 180°, c'eſt-à-dire, AFL & QFL, il ſemble donc d'abord qu'il y auroit quatre ſolutions, mais il eſt aiſé de voir que ces quatre ſolutions ſe réduiſent à deux, puiſque l'angle obtus AFL eſt = à l'angle obtus QFL, & l'angle aigu AFL = à l'angle aigu QFL.

84. Si on fait $LO = FL$, & qu'on tire FO, & de plus FG perpendiculaire à AF, il eſt aiſé de voir que l'angle $GFO = x$; car à cauſe de $LF = LO$, on a $LFO = 90^\circ - \frac{FLO}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} - \frac{AFL}{2}$ $= 90^\circ - \frac{2\alpha}{2} - \frac{2\alpha - 2x}{2}$, donc ajoutant ou ôtant l'angle $GFL = 2\alpha + 2x - 90^\circ$, ou $90^\circ - 2\alpha - 2x$, on aura l'angle $GFO = x$.

85. Pour trouver les angles $\mathcal{C}$ & $\mathcal{C}'$, il faut mener à volonté GK perpendiculaire (Fig. 23) à FO, (on fera de même pour l'autre ligne fo) & prendre $KV = ku$, & telles que $KV = \frac{GK \times (m' - m)}{m' + m}$. Mais notre ſolution de l'art. 20 paroît un peu plus ſimple, en ce qu'elle donne tout de ſuite, & par une ſeule conſtruction, les angles $\mathcal{C}'$ & $\mathcal{C}$, ſans avoir beſoin de l'angle x, & que de plus elle donne auſſi ce même angle x très-aiſément (art. 18).

86. Puiſque $\text{ſin.}\,(2\alpha + 2x) = \frac{\text{ſin.}\,2\alpha(R+1)}{R-1} =$

$\frac{M'm' - Mm}{Mm' - M'm} \times$ fin. 2α, il eſt clair que x étant ſuppoſée poſitive, c'eſt-à-dire, C' & C poſitifs, $M'm' - Mm$ ne ſauroit être $= Mm' - M'm$; en effet, il faudroit pour cela que $(M' - M)m'$ fut $= (M - M')m$, ce qui donneroit $M' = M$, ſuppoſition illuſoire. On voit auſſi que $R - 1 = R + 1$ (ce qui eſt la même choſe que $Mm' - M'm = M'm' - Mm$) donneroit $R = \infty$, & par conſéquent $M' - M = 0$, ou $M' = M$.

87. Dans le cas de fin. $2\alpha = 1$, x étant poſitive, le problême eſt impoſſible, car ſoit que R ſoit $>$ ou < 1, $\frac{R+1}{R-1}$ eſt une quantité poſitive ou négative $>$ que l'unité, ainſi $\frac{\text{fin. } 2\alpha \times (R+1)}{R-1}$ eſt toujours $>$ l'unité poſitive ou négative, donc la valeur de fin. $(2\alpha + 2x)$ eſt illuſoire. On remarquera que dans le cas de x poſitive, R eſt toujours poſitif (art. 67).

88. Si $Mm' - M'm = 0$, ce qui donne ou $M = M'$, & $m' = m$, ſuppoſition illuſoire, ou $\frac{M}{M'} = \frac{m}{m'}$, on aura fin. $2\alpha + 2x = \infty$, & par conſéquent le problême impoſſible. Toutes ces conſéquences peuvent auſſi ſe déduire aiſément de notre ſolution.

89. Si l'on veut que le rayon émergent ſoit parallèle à l'incident, il eſt aiſé de voir que l'angle de réfraction à la ſortie du priſme doit être $= 2\alpha + k$, &

qu'ainſi on aura $\frac{\text{ſin.}(2\alpha+C)}{M} = \text{ſin.}(2\alpha+k)$, donc $\frac{(\text{ſin.}2\alpha+C)+\text{ſin}(2\alpha+k)}{\text{ſin.}(2\alpha+C)-\text{ſin.}(2\alpha+k)} = \frac{M+1}{M-1}$; ou $\frac{\text{tang.}\left(2\alpha+\frac{C+k}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{C-k}{2}\right)} = \frac{M+1}{M-1}$. On a auſſi ſin. $k = \frac{\text{ſin } C}{m}$; d'où $\frac{\text{ſin. } C+\text{ſin } k}{\text{ſin. } C-\text{ſin } k} = \frac{m+1}{m-1}$, ou $\frac{\text{tang}\left(\frac{C+k}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{C-k}{2}\right)} = \frac{m+1}{m-1}$. Donc $\frac{\text{tang}\left(\frac{C+k}{2}\right)}{\text{tang}\left(2\alpha+\frac{C+k}{2}\right)} = \frac{(m+1)(M-1)}{(m-1)(M+1)}$.

Soit $\frac{C+k}{2} = \gamma$, on aura $\frac{\text{tang } \gamma}{\text{tang}(2\alpha+\gamma)} = \frac{(m+1)(M-1)}{(m-1)(M+1)}$; & en faiſant le ſecond membre $= \frac{1}{R'}$, on aura une conſtruction tout-à-fait ſemblable à celle de l'article 18, en prenant $Fn = 1$, $Fi = \frac{m+1}{m-1}$, $FL = \frac{M+1}{M-1}$.

90. L'équation $\frac{1}{M}\text{ ſin.}(2\alpha+C) = \frac{1}{M'}\text{ ſin.}(2\alpha+C')$ pour le paralléliſme des rayons émergens, & l'équation $\frac{1}{M}$ ſin. $(2\alpha+C) = \text{ſin.}(2\alpha+k)$, pour le paralléliſme du rayon émergent à l'incident, donnent deux valeurs de tang. 2α,

ſavoir, tang. $2\alpha = \frac{\frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}'}{M'} - \frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}}{M}}{\frac{\text{cof. } \mathfrak{C}}{M} - \frac{\text{cof. } \mathfrak{C}'}{M'}}$, & tang. $2\alpha = \frac{\text{ſin. } k - \frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}}{M'}}{\frac{\text{cof. } \mathfrak{C}}{M} + \text{cof. } k}$. D'où l'on tire, en réduiſant & mettant pour ſin. $\mathfrak{C}'$ & ſin. $\mathfrak{C}$ leurs valeurs m' ſin. k & m ſin. k, l'équation $\left(\frac{\text{cof. } \mathfrak{C}}{M} - \frac{\text{cof. } \mathfrak{C}'}{M'}\right)\left(1 - \frac{m}{M}\right) = \left(\frac{\text{cof. } \mathfrak{C}}{M} - \text{cof. } k\right)\left(\frac{m'}{M'} - \frac{m}{M}\right)$, ou $\frac{\text{cof. } \mathfrak{C}}{M}\left(1 - \frac{m'}{M'}\right) - \frac{\text{cof. } \mathfrak{C}'}{M'}\left(1 - \frac{m}{M}\right) + \text{cof. } k\left(\frac{m'}{M'} - \frac{m}{M}\right) = 0$.

91. On a de plus ſin. $\mathfrak{C} = m$ ſin. k, & ſin. $\mathfrak{C}' = m'$ ſin. k; donc ſi on fait ſin. $k = x$, ſin. $\mathfrak{C} = y$, ſin. $\mathfrak{C}' = z$, on aura $\frac{\sqrt{(1 - m^2x^2)}}{M}\left(1 - \frac{m'}{M'}\right) - \frac{\sqrt{(1 - m'^2x^2)}}{M}\left(1 - \frac{m}{M}\right) + \sqrt{(1 - xx)}\left(\frac{m'}{M'} - \frac{m}{M}\right) = 0$.

92. Donc ſuppoſant $xx = u$, & faiſant diſparoître les radicaux, on aura une équation du ſecond degré qui donnera la valeur de u, & qui ſera l'équation de condition pour le double paralléliſme; d'où l'on voit que, la loi de réfraction étant donnée, l'angle 2α du priſme doit avoir néceſſairement une certaine valeur, pour que les deux paralléliſmes aient lieu à-la-fois;

fois, encore pourroit-il ſe faire que cette valeur de 2α fut impoſſible, ſi ſin. 2α ſe trouvoit imaginaire, ou négatif, ou $=0$, ou >1; ce qui dépend des valeurs de m, m', M & M'.

93. On peut mettre l'équation précédente ſous cette forme plus commode, $\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{M^2}-\frac{m^2x^2}{M^4}\right)}}{1-\frac{m}{M}}-\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{M^2}-\frac{m^2x^2}{M^4}\right)}}{1-\frac{m}{M'}}+\frac{\sqrt{(1-xx)}\left(\frac{m}{M'}-\frac{m}{M}\right)}{\left(1-\frac{m}{M}\right)\left(1-\frac{m'}{M'}\right)}=0$,

ou $\frac{\sqrt{(1-m^2x^2)}}{M-m}-\frac{\sqrt{(1-m'^2x^2)}}{M'-m'}+\frac{\sqrt{(1-xx)}\left(\frac{m}{M}-\frac{m}{M}\right)}{\left(1-\frac{m}{M}\right)\left(1-\frac{m'}{M'}\right)}=0$.

94. Et ſi on ſuppoſe $m'=m+dm$, $M'=M+dM$, on aura $\frac{\sqrt{(1-xx)}\,d\left(\frac{m}{M}\right)}{\left(1-\frac{m}{M}\right)^2}=d\left(\frac{\sqrt{(1-m^2x^2)}}{M-m}\right)$, ce qui donne en réduiſant, $(M\,dm-m\,dM)\sqrt{(1-xx)}=(M-m)x-mdm.\frac{xx}{\sqrt{(1-m^2x^2)}}+(dm-dM)\sqrt{(1-m^2x^2)}$.

En faiſant $xx=y$, & faiſant évanouir les radicaux, on aura une équation qui ſera la même que la réſultante de celle que nous avons déja donnée pour ce

même objet dans le Tom. VI de nos *Opuſc* pag. 265, art. 13.

95. On peut ſimplifier cette équation en faiſant $\frac{1}{x^2} = uu$, ce qui donnera $(Mdm - mdM)\sqrt{(uu-1)} = \frac{(M-m)x - m\,dm}{\sqrt{(u^2-m^2)}} + (dm - dM)\sqrt{(u^2-m^2)}$, ou $(Mdm - mdM)\sqrt{(u^2-1)}.\sqrt{(u^2-m^2)} = -Mm\,dm + m^2\,dM + u^2\,dm - u^2\,dM$, & en quarrant & réduiſant $(u^4 - u^2 - m^2u^2)(Mdm - mdM)^2 = 2u^2(dm - dM) \times (-Mm\,dm + m^2\,dM) + u^4(dm - dM)^2$, donc $(u^2 - 1 - m^2)(Mdm - m\,dm)^2 = (2\,dM - 2\,dm)(Mm\,dm - m^2\,dM) + u^2(dm - dM)^2$, & $u^2 \times [(Mdm - m\,dM)^2 - (dm - dM)^2] = (1 + m^2)(Mdm - mdM)^2 + (2dM - 2dm)(Mm\,dm - m^2\,dM)$; ſuppoſant donc $m - M = \omega$, & $\frac{m}{M} = \lambda$, on aura $u^2(M^4 d\lambda^2 - d\omega^2) = M^4(1 + m^2)\,d\lambda^2 - 2m\,d\omega\,d\lambda . M^2 = M^4 d\lambda^2 + (M^2 m\,d\lambda - d\omega)^2 - d\omega^2$; ou $(u^2 - 1)(M^4 d\lambda^2 - d\omega^2) = M^2 m d\lambda - d\omega)^2$; donc à cauſe de $u^2 - 1 = \frac{1 - xx}{xx} = (\text{cot. } k)^2$, on aura cot. $k = \frac{M^2 m\,d\lambda - d\omega}{\pm\sqrt{(M^4 d\lambda^2 - d\omega^2)}}$, & tang. $k = \frac{\pm\sqrt{(M^4 d\lambda^2 - d\omega^2)}}{M^2 m\,d\lambda - d\omega}$; quantité dans laquelle on peut mettre encore $M\lambda$ au lieu de m, & $\frac{\omega}{\lambda - 1}$ au lieu de M, ce qui donne une ſolution aſſez ſimple du problême, lorſque le problême pourra en effet ſe réſoudre, c'eſt-a-dire, lorſque les

conditions de l'art. 32 & ſuiv. ſeront obſervées. Nous ne croyons pas néceſſaire d'entrer là-deſſus dans un plus grand détail. Nous obſerverons ſeulement que ſi la valeur de tang. 2α, déduite de l'art. 90 eſt ici négative, il eſt néceſſaire auſſi que k ſoit négatif, c'eſt-à-dire, que le rayon incident DF tombe dans l'angle EFB, puiſqu'en écrivant -2α au lieu de 2α, l'angle FLK eſt alors $= \zeta - 2\alpha$, au lieu de $\zeta + 2\alpha$.

96. Il eſt remarquable que ſi x eſt très-petite, les termes où eſt xx s'évanouiront, & le double paralléliſme ne pourra avoir lieu ſans une équation entre m, dm, M, dM, ſavoir, $M\,dm - m\,dM = dm - dM$, ou $\frac{dM}{M-1} = \frac{dm}{m-1}$, ce qui s'accorde encore avec le Tom. VI de nos *Opuſc.* pag. 283.

97. Au lieu de chercher l'angle 2α par les valeurs données de m, m', M, M', il ſeroit plus ſimple de chercher quelles doivent être les valeurs de m, m', M, M', celles de 2α & de k étant ſuppoſées données, pour ſatisfaire ou à l'un des deux paralléliſmes, ou aux deux à-la-fois; on aura pour cela les deux équations $\frac{\text{ſin. }(2\alpha+\zeta)}{\text{ſin. }(2\alpha+\zeta')} = \frac{M}{M'}$ pour le paralléliſme des rayons émergens entr'eux, $\frac{\text{ſin. }(2\alpha+\zeta)}{M} = \text{ſin. }(2\alpha + k)$ pour celui du rayon émergent au rayon incident.

98. De-là on tire les valeurs de M & de M', les valeurs de m & de m' étant d'ailleurs ce qu'on voudra,

& il eſt clair, 1°. que ſi on veut ſatisfaire au ſeul parallélisme d'un des rayons émergens avec l'incident, il ſuffira de trouver M, par l'équation $\frac{\sin(2\alpha+C)}{\sin(2\alpha+k)} = M$, M' étant d'ailleurs ce qu'on voudra. 2°. Que ſi on veut ſatisfaire au ſeul parallélisme des rayons émergens, il ſuffira de ſuppoſer le rapport de M à $M' = \frac{\sin(2\alpha+C)}{\sin.(2\alpha+C')}$, M & M' étant d'ailleurs ce qu'on voudra, pourvu qu'ils ſatisfaſſent à ce rapport.

3°. Enfin que pour ſatisfaire aux deux parallélismes à-la-fois, il faut avoir $M = \frac{\sin(2\alpha+C)}{\sin(2\alpha+k)}$, & $M' = \frac{M\sin(2\alpha+C')}{\sin(2\alpha+C)} = \frac{\sin(2\alpha+C')}{\sin(2\alpha+k)}$.

99. Mais cette méthode de déterminer M, M', m & m' par l'angle 2α du priſme, a l'inconvénient que les quantités M, M', &c. étant données par l'expérience, ne dépendent point, comme l'angle 2α, de la volonté de l'obſervateur. Au reſte, il demeure conſtant par toute cette théorie, que la prétendue expérience de Newton, ſur le double parallélisme des rayons émergens entr'eux & avec l'incident, eſt au moins très-douteuſe, & qu'ainſi M Klingenſtierna n'ayant appuyé que ſur cette expérience ſuppoſée, la fauſſeté de la loi de réfraction avancée par Newton, la fauſſeté de cette loi reſtoit encore à prouver, comme nous l'avons déjà montré dans le §. I de ce Mémoire.

100. Ayant trouvé par les méthodes précédentes

quelle doit être la direction du rayon DF, ſoit dans l'angle EFA, ſoit dans l'angle EFB, pour que les rayons émergens ſoient parallèles entr'eux ; ſi l'on joint au priſme FAC un autre priſme, dont une des faces ſoit coincidente avec AB, & dans lequel le rayon DF entre perpendiculairement, il eſt clair que la réfraction ſe fera dans ce double priſme, comme dans le priſme ſimple BAC.

101. En général, s'il y a deux priſmes, & que les rapports de réfraction en ſortant du ſecond priſme, ſoient $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\mu'}$, on aura, pour le paralléliſme des rayons émergens, les équations $\text{ſin. } \mathfrak{C} = m \text{ ſin. } k$, $\text{ſin. } \mathfrak{C}' = m' \text{ ſin. } k$, $\frac{1}{M} \text{ ſin. } (2\alpha + \mathfrak{C}) = \text{ſin. } k$; $\frac{1}{M'} \text{ ſin. } (2\alpha + \mathfrak{C}') = \text{ſin. } k'$; $\frac{1}{\mu} \text{ ſin. } (2\alpha' + k) = \frac{1}{\mu} \text{ ſin. } (2\alpha' + k')$.

102. Donc faiſant $\mathfrak{C}' = \frac{x+y}{2}$, $\mathfrak{C} = \frac{x-y}{2}$, $K' = \frac{\zeta + u}{2}$, $K = \frac{\zeta - u}{2}$, on aura

1°. $\frac{\text{tang } x}{\text{tang } y} = \frac{m+m'}{m'-m}$;

2°. $\text{ſin. } (2\alpha + x) \text{ cof. } y = \frac{M+M'}{2} \text{ ſin. } \zeta \text{ cof. } u + \frac{M-M}{2} \times \text{ſin. } u \text{ cof. } \zeta$;

3°. $\text{ſin. } y \text{ cof. } (2\alpha + x) = \frac{M+M'}{2} \text{ ſin. } u \text{ cof. } \zeta + \frac{M'-M}{2} \times \text{ſin. } \zeta \text{ cof. } u$;

$4°.\ \frac{\text{tang. } (2\alpha' + \zeta)}{\text{tang. } u} = \frac{\mu' + \mu}{\mu' - \mu}$.

La ſeconde & la troiſiéme équation donnent, en les diviſant l'une par l'autre, $\frac{\text{tang } (2\alpha + x)}{\text{tang. } y} =$

$$\frac{(M + M')\text{tang. } \zeta + (M' - M)\text{tang } u}{(M + M)\text{tang } u + (M - M)\text{tang. } \zeta}.$$

103. Soit $M' = M + dM$, $m' = m + dm$, dM & dm étant très-petits, on aura y & u très-petits, d'où l'on tire les équations approchées,

$1°.\ \frac{\text{tang } (2\alpha + x)}{\text{tang } x} = \frac{dm}{2m} \times \frac{2M\text{tang. } \zeta}{2M\text{tang } u + dM\text{tang } x}$;

$2°.\ \text{ſin. } (2\alpha + x) = M \text{ ſin. } \zeta$.

$3°.\ \frac{\text{tang } (2\alpha' + \zeta)}{\text{tang } u} = \frac{\mu' + \mu}{\mu' - \mu} = \frac{2\mu}{d\mu}$;

Or tang. $(2\alpha' + \zeta) = (\text{ſin. } 2\alpha' \text{ coſ. } \zeta + \text{ſin. } \zeta \text{ coſ. } 2\alpha') : (\text{coſ. } 2\alpha' \text{ coſ. } \zeta - \text{ſin. } \zeta \text{ ſin. } 2\alpha') =$ (en diviſant le numérateur & le dénominateur par coſ. 2α coſ. ζ)

$$\frac{\text{tang } 2\alpha' + \text{tang. } \zeta}{1 - \text{tang. } \zeta \text{ tang } 2\alpha'}.$$

104. D'où l'on tire, à cauſe de tang. $\zeta = \frac{\text{ſin } \zeta}{\text{coſ. } \zeta} =$

$$\frac{\text{ſin } (2\alpha + x)}{\sqrt{(M^2 - \text{ſin } (2\alpha + x)^2}},$$ & de tang. $u = \frac{d\mu}{2\mu} \times (\text{ſin. } 2\alpha'$ coſ. $\zeta + \text{ſin. } \zeta \text{ coſ. } 2\alpha') : (\text{coſ. } 2\alpha' \text{ coſ. } \zeta - \text{ſin. } \zeta \text{ ſin. } 2\alpha')$ $= \frac{d\mu}{2\mu}$ (tang. $2\alpha' +$ tang. ζ) $(1 -$ tang. ζ tang. $2\alpha')$, une équation finale en x; ce qui n'a pas beſoin d'être expliqué davantage.

105. Au lieu de prendre x pour inconnue, on pourroit prendre ζ, & conſidérer que $\frac{\text{tang } (2\alpha+x)}{\text{tang } x} =$ $\frac{\text{tang.}(2\alpha+x)}{\text{tang } (2\alpha+x-2\alpha)} = \frac{\text{ſin } (2\alpha+x)}{\text{cof } (2\alpha+x)\frac{\text{ſin.}(2\alpha+x-2\alpha)}{\text{cof } 2\alpha+x-2\alpha}} =$ $[(\text{ſin. } 2\alpha+x)(\text{cof. } (2\alpha+x)\text{cof. } 2\alpha)+\text{ſin.}(2\alpha+x)$ $(\text{ſin. } (2\alpha+x)\text{ ſin. } 2\alpha)]\ [\text{ſin.}(2\alpha+x)\text{ cof.}(2\alpha+x)$ $\text{cof } 2\alpha - \text{cof. } (2\alpha+x)\text{ cof. } (2\alpha+x, \text{ ſin. } 2\alpha]$. On mettra dans cette quantité au lieu de ſin. $(2\alpha+x)$ & de cof. $(2\alpha+x)$, leurs valeurs M ſin. ζ & $\sqrt{(1-M^2 \text{ ſin. } \zeta^2)}$, & au lieu de tang. ζ dans l'autre membre de l'équation, ſa valeur $\frac{\text{ſin. } \zeta}{\sqrt{(1-\text{ſin } \zeta^2)}}$, & on aura une équation en ſin. ζ.

106. S'il étoit queſtion de rendre le rayon émergent parallèle à l'incident, on auroit des équations ſemblables, en mettant μ au lieu de μ', & 1 au lieu de μ. Mais en voilà aſſez ſur l'objet de ces recherches, que les Géomètres pourront aiſément pouſſer plus loin, s'ils le jugent à propos.

§. III.

Sur les couleurs qui ſe forment au foyer des Lentilles, & ſur les dimenſions de ce foyer.

1. Soit CD une lentille (Fig. 24), ABR le rayon qui paſſe par l'axe, & que je nomme *rayon central*, R le foyer des rayons rouges infiniment proches de l'axe, V celui des rayons violets, RL l'aberration de ſphéricité des rayons rouges, VL', celle des rayons violets.

2. Je ſuppoſerai pour plus de ſimplicité $VL' = RL$, ces deux quantités étant en effet très-peu différentes l'une de l'autre ; il ſeroit cependant facile d'avoir égard à leur différence, ſi on le jugeoit néceſſaire.

3. Cela poſé, il eſt clair, 1°. qu'il y aura du rouge dans tous les points de l'eſpace RL, & du violet dans tous les points de l'eſpace VL'. 2°. Que depuis R juſqu'en V, on aura le foyer de tous les rayons infiniment proches de l'axe, depuis le rouge juſqu'au violet, en procédant par degrés inſenſibles. 3°. Que le foyer total occupera en longueur ſur l'axe, l'eſpace RL'. 4°. Qu'en R il n'y aura que du rouge, & en L' que du violet. 5°. Que ſi on prend un point r entre R & L, la couleur en r ſera formée de la couleur dont le foyer

foyer eſt en r, plus de la couleur rouge qui s'étend juſqu'en L, plus de toutes les couleurs entre R & r, qui s'étendent juſqu'à la limite l, en prenant $rl = RL$.

4. Diſtinguons maintenant trois cas, celui où le point L tombe en V, celui où il tombe au-deſſous, & celui où il tombe au-deſſus.

5. Dans le premier cas, où les points V, L (Fig. 25) ſe confondent, il y a en L du rouge & du violet, & par conſéquent auſſi toutes les autres couleurs intermédiaires, & la lumiere en V ou L eſt blanche, en r, entre R & L, il y aura une couleur formée de toutes les couleurs dont les foyers ſont entre R & r; & en Z, entre V & L', ſi on fait $ZZ' = RV = VL'$, il y aura une couleur formée du mélange de toutes celles qui ſont entre Z & V, puiſque par l'aberration de ſphéricité, ces couleurs ſe trouvent dans la ligne $Z'Z$.

6. Dans le ſecond cas où L eſt au-deſſous de V, 1°. ſi on prend (Fig. 26) $Rr < RL$, la couleur en r ſera formée de toutes les couleurs dont les foyers ſont entre R & r, & la couleur en L, de toutes les couleurs dont les foyers ſont entre R & L, 2°. ſi on prend un point i entre L & V, la couleur en i (faiſant $ir' = RL$) ſera formée de toutes les couleurs qui ſont depuis r' juſqu'à i. 3°. Enfin, ſi on prend un point Z entre V & L', alors faiſant $Zi' = RL = VL'$, la couleur en Z ſera formée de toutes les couleurs qui ſont entre i' & V.

7. Dans le troiſiéme cas où L eſt au-deſſus de V, (Fig. 27) on verra de même, 1°. que la couleur en r entre R & V ſera formée de toutes les couleurs dont les foyers ſont entre R & r. 2°. Qu'en V, elle ſera blanche & formée de toutes les couleurs. 3°. Que depuis V juſqu'en L, elle ſera encore blanche partout, & formée de toutes les couleurs. 4°. Qu'en Z entre L & L', ſi on fait $ZZ' = RL = VL'$, la couleur ſera formée de toutes les couleurs dont les foyers ſont entre Z' & V.

8. De-là il réſulte que dans le premier cas (Fig. 25) il n'y a de blanc qu'au ſeul point V ou L, que dans le ſecond (Fig. 26), il n'y a de blanc en aucun endroit de RL, & que les couleurs les plus fortes ſeront dans l'eſpace VL, comme étant formées d'un plus grand nombre de couleurs réunies, & que dans le troiſiéme cas il y a (Fig. 27) du blanc dans tout l'eſpace VL.

9. De plus, dans le ſecond cas, ſi on fait $VO = RL$, & que O ſoit entre R & L (Fig. 28), il eſt viſible que le point L renfermant toutes les couleurs qui ſont depuis R juſqu'en L, & le point V toutes celles qui ſont depuis V juſqu'en O, toutes les couleurs qui ſont entre L & O, ſe trouveront en L & en V, & par conſéquent auſſi dans tous les points de LV. Si le point O tombe en L, il n'y aura que la ſeule couleur L qui ſe trouve dans tous les points de LV, & ſi $RO > RL$, il n'y aura aucune couleur qui

ſe trouve à-la-fois dans tous les points de LV.

10. Il y a un peu plus de difficulté à déterminer le mêlange des couleurs dans l'aberration latitudinale, & la plus petite image qui en réſulte. Nous ſuppoſerons pour plus de facilité que les rayons tombent tous ſur la lentille parallèlement à l'axe, & nous remarquerons d'abord qu'en conſéquence des formules données (Tome III de nos *Opuſcules*, pag. 79, art. 185) nous aurons

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{2(P-1)}{r} + \frac{\zeta^2}{r^3}\left(\frac{P-1}{P}\right)(2-P+4P^3-4P^2);$$

d'où on a $\Phi =$ à très-peu près $\frac{r}{2(P-1)} - \frac{\zeta^2}{r^3} \times$

$\frac{r^4}{4(P-1)^3} \times \frac{P-1}{P}(2-P+4P^3-4P^2)$. Prenant donc P pour la quantité qui convient aux rayons moyens, en ſorte que $P+dP$ ſoit celle qui convient aux rayons violets, & $P-dP$ celle qui convient aux rayons rouges, l'aberration de réfrangibilité ſera pour les rayons violets $-\frac{r\,dP}{2(P-1)^2}$, & pour les rouges $+\frac{r\,dP}{2(P-1)^2}$, en ſorte que le foyer V des rayons violets ſera plus près de la lentille que le foyer R des rayons rouges; de plus, l'aberration de ſphéricité pour tous les rayons ſera négative, parce que P eſt >1 & $P<2$, ce qui rend $2-P+4P^3-4P^2$ poſitif, & l'aberration de ſphéricité $-\frac{\zeta^2 r^4}{r^3.4(P-1)} \times \frac{P-1}{P} \times (2-P+$

$4P^3 - 4P^2$) négative; donc L & L' (Fig. 25, 26, 27) ſeront au deſſus de R & de V.

11. Soient maintenant RA, RB (Fig. 29) les cauſtiques des rayons rouges, Va, Vb celles des rayons violets que je ſuppoſerai les mêmes que celles des rayons rouges, d'autant que la différence en eſt très-petite. Soient de plus C, D, c, d, les points où les cauſtiques ſont touchées par les rayons extrêmes venans de C & de D', il eſt aiſé de voir, 1°. qu'au-deſſus de CD vers B (& on en dira de même de cd) tous les rayons rouges réfractés tombent entre les deux extrêmes qui touchent la cauſtique en C & en D, d'où il s'enſuit qu'en CD & au-deſſus, comme en ir, l'image *rouge* eſt CD ou ir, c'eſt-à-dire, renfermée entre les rayons rouges extrêmes cr, Di, qui touchent la cauſtique en C & en D. 2°. Qu'au-deſſous de CD, & juſqu'en ML, ou les rayons touchans (Fig. 30) Cr, Di prolongés rencontrent les cauſtiques, l'image en HG, par exemple, ſera terminée par les deux cauſtiques. 3°. Enfin, qu'au-deſſous de ML, par exemple, en $M'L'$, l'image ſera terminée en M', L' par les rayons $iDNLL'$, $rCNMM'$.

12. D'où il réſulte, ce qui peut d'ailleurs être prouvé de beaucoup d'autres manieres, que la plus petite de toutes les images rouges, & par conſéquent le vrai foyer latitudinal des rayons rouges ſera ML.

13. On trouvera de même l'image ml (Fig. 31) formée par les rayons violets, & on voit qu'en général

l'image formée par des rayons rouges quelconques, eſt déterminée par les deux points ou les rayons extrêmes de cette couleur coupent la cauſtique de l'autre côté de l'axe.

14. Ainſi, on voit en général que pour une couleur quelconque (Fig. 32), l'image, ou plutôt les différentes images KQ d'un côté de l'axe (& il en ſera de même de l'autre côté) ſeront renfermées dans la ligne mixte, $rCLQZ$, compoſée, 1°. de la tangente rC au point extrême C de la cauſtique, formée par les rayons de cette couleur, 2°. de la portion CL de la même cauſtique, juſqu'au point L où eſt la plus petite image, formée par le rayon extrême qui venant de l'autre côté de l'axe, coupe la cauſtique CL en L, 3°. enfin de la droite LZ, qui eſt le prolongement de ce rayon coupant.

15. Cette ligne mixte ſera à très-peu près la même pour tous les rayons, depuis le rouge juſqu'au violet, & elle ne ſera ſeulement que changer de poſition parallèlement à l'axe AR, ſa diſtance à cet axe demeurant d'ailleurs la même.

16. Soient donc $rCLZ$, $r'c'L'Z'$ (Fig. 33) les deux limites des images pour les rayons rouges & les violets; il eſt clair, 1°. que l'image ON formée au point d'interſection N de ces deux limites ou lignes mixtes, ſera celle qui réſulte des rayons rouges & violets, puiſqu'elle ſera la plus petite de toutes les images KQQ ou KQQ que forment ces rayons réunis. 2°. Que comme la li-

mite $rCNLZ$ des rayons rouges eſt extérieure à toutes les autres, les rayons rouges étant les moins réfrangibles, chaque image $KQ'Q$ terminée à la limite des rayons rouges, renfermera toutes les images des autres rayons; & que de plus ON ſera la moindre des images formées par tous les rayons pris enſemble; & que par conſéquent ON ſera l'image ou le vrai foyer de la lentille.

17. Au reſte, cette image ON ne ſera pas blanche dans toute ſon étendue. Pour en déterminer la couleur, ſoit priſe ſur la ligne ON (Fig. 34) la partie $OH = ML = M'L'$, c'eſt-à-dire, = à la plus petite image formée par les rayons d'une ſeule couleur. Imaginons enſuite la cauſtique, intermédiaire entre les deux extrêmes, qui paſſe par H, c'eſt-à-dire, qui donne en O ſa plus petite image, égale à ML ou $M'L'$, il eſt aiſé de voir, 1°. que depuis O juſqu'en H, il y aura des rayons de toute couleur, & qu'ainſi la partie OH ſera blanche. 2°. Que ſi on appelle ρ la couleur qui forme la cauſtique paſſant par H, cette couleur ρ ne ſe trouvera plus dans l'eſpace HN. 3°. Que ſi on appelle ρ' la couleur qui forme la limite ou ligne mixte paſſant par un point h de HN, cette couleur ρ' ne ſe trouvera plus dans l'eſpace hN. Or comme il y a deux limites, celle du rouge & du violet, c'eſt-à-dire, des deux couleurs extrêmes qui paſſent par N, il y aura de même en h deux couleurs ρ', ρ'', l'une plus proche du violet, l'autre plus proche du rouge, & il

n'y aura que le point H où il ne paſſera qu'une ſeule limite ou ligne mixte. Soit ρ' la couleur la plus proche du violet ou la plus réfrangible, & ρ'' la plus proche du rouge ou la moins réfrangible, il n'y aura dans l'eſpace hN, que les couleurs qui vont depuis la couleur ρ' juſqu'au violet, & depuis la couleur ρ'' juſqu'au rouge.

18. Soit R la diſtance focale des rayons rouges infiniment proches de l'axe, $R = \omega dP = \delta C^2$, la diſtance focale d'une autre eſpece de rayons quelconques, C étant ſuppoſé très-petit, Rr (Fig. 35) la cauſtique des rayons rouges, r le point où cette cauſtique eſt touchée par les rayons extrêmes, rV, ru, deux tangentes infiniment proches en r; on aura $Vu = 2\delta C dC$, $Vi = \frac{Vu \times C}{R} = \frac{2\delta C^2 dC}{R}$, $\frac{Vi}{Vr}$, ou (à cauſe de l'angle KVR très-petit) $\frac{Vi}{VK} = \frac{dC}{R}$; donc $VK = \frac{Vi.R}{dC} = 2\delta C^2$; on a de plus $VR = \delta C^2$, $Kr = VK \times \frac{C}{R} = \frac{2\delta C^3}{R}$. Soit $KR = \alpha$, & $Kr = \gamma$, on aura $\gamma = \frac{2\delta C^3}{R}$, $\alpha = VK + VR = 3\delta C^2$, & $C = \left(\frac{\alpha}{3\delta}\right)^{\frac{1}{2}}$, donc $\gamma = \frac{2\delta}{R} \times \left(\frac{\alpha}{3\delta}\right)^{\frac{3}{2}}$, ce qui montre (comme on le ſavoit d'ailleurs) que la cauſtique Rr eſt une ſeconde parabole cubique, dont je mets l'équation ſous cette

forme plus ſimple $y = Nx^{\frac{3}{2}}$, N étant $= \frac{1}{R\sqrt{(97d)}}\alpha^{\frac{1}{2}}$.

19. Pour déterminer, au moyen de cette cauſtique, la plus petite image ML des rayons rouges (par exemple), on nommera RO, z (Fig. 36), & on aura $MO = Nz^{\frac{3}{2}} = \frac{VO \times Kr}{KV}$. Or $Kr = N\alpha^{\frac{3}{2}}$, $VK = \frac{1}{3}\alpha$, $RV = \frac{\alpha}{3}$, $VO = RV - z$, donc $Nz^{\frac{3}{2}} = \frac{N\alpha^{\frac{3}{2}} \cdot 3}{2\alpha} \times \left(\frac{\alpha}{3} - z\right)$, & $z^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{\alpha}}{2}\left(\frac{\alpha}{3} - z\right)$, donc $z^3 = \frac{\alpha}{4}(\alpha - 3z)^2$, équation à laquelle on ſatisfait aiſément en prenant $z = \frac{\alpha}{4}$, ce qu'on ſavoit encore d'ailleurs. Donc ML ou $2OL = 2Nz^{\frac{3}{2}} = 2N \times \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \times \frac{\alpha}{4} = \frac{N\alpha^{\frac{3}{2}}}{4}$, & $OL = \frac{N\alpha^{\frac{3}{2}}}{8}$.

20. On trouvera les mêmes valeurs relativement à la cauſtique $V'a'$ (Fig. 35) des rayons violets, ſenſiblement égale & ſemblable à celle des rayons rouges, ainſi que les cauſtiques de tous les autres rayons colorés.

21. Maintenant on tematquera, 1°. que $RV' = \alpha dP$ (Fig. 35); 2°. que $M'R = RV' + V'M' - KR = \alpha dP + \frac{\alpha}{4} - \alpha = \alpha dP - \frac{3\alpha}{4}$; & que $N'M' = \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{8} = \frac{\alpha}{12}$; $N'V = \frac{\alpha}{12} + M'K + KV = \frac{\alpha}{12} + \alpha dP$ —

$-\frac{3a}{4}+\frac{2a}{3}=a\,dP$; ce qu'on peut voir encore plus ſimplement, en conſidérant que $N'V'=RV$. 3°. Que ſi on cherche les points où les rayons $N'L'Y$, $V'Y$ concourent, on aura par conſéquent $VT=\frac{a\,dP}{2}$, $RT=\frac{a\,dP}{2}+\frac{a}{3}$. Donc T ſera au-deſſus ou au-deſſous de K, c'eſt-à-dire, $RT>$ ou $<RK$, ſelon que $\frac{a\,dP}{2}+\frac{a}{3}$ ſera $>$ ou $<a$, c'eſt-à-dire, ſelon que $a\,dP$ ſera $>$ ou $<\frac{4a}{3}$.

22. Si T eſt au-deſſus de K, ou ſe confond avec K, la plus petite image ſera $TY=\frac{a\,dP}{2}\times\frac{c}{R}$.

23. Si T eſt au-deſſous de K, la plus petite image ON (Fig. 37) ſe trouvera en conſidérant, 1°. que $RN'=a\,dP+\frac{a}{3}$; 2°. que $RK=a$, & ſi l'on fait $RO=u$, on aura $ON=N.u^{\frac{3}{n}}=\frac{c}{R}\times N'O=\frac{c}{R}\left(a\,dP+\frac{a}{3}-u\right)$, équation d'où l'on tirera u.

24. Pour trouver la cauſtique qui paſſe par l'extrémité H de l'image blanche, c'eſt-à-dire, la couleur qui forme cette cauſtique, on remarquera (Fig. 38) que $OH=ML=N\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{3}{n}}=\frac{Na^{\frac{3}{n}}}{2}$; & que par con-

ſéquent dans la cauſtique ρH, on a $\rho O = \frac{a}{4}$; donc puiſqu'on a la valeur de $RO = u$ (art. 23), on aura $R\rho = u - \frac{a}{4}$; de plus, $R\rho = \omega\, d\omega$, $d\omega$ étant la quantité qui convient aux rayons de la couleur cherchée, quantité qui eſt $= 0$ pour les rayons rouges, & la plus grande pour les rayons violets. Donc $d\omega = \frac{4u - a}{4\omega}$.

25. On trouvera de même les deux couleurs qui ſe réuniſſent en T (Fig. 39); en remarquant, 1°. que $PQ = \frac{N\omega^2}{8}$. 2°. Que $PO = \rho\sigma'$, & que par conſéquent $HT = \frac{PO \times c}{R} = \rho\sigma' \times \frac{c}{R}$. Donc $OT = \frac{N\omega^{\frac{1}{2}}}{8} + \frac{\rho\sigma' \times c}{R} = N.\, O\sigma^{\frac{1}{2}}$, d'où l'on coonoîtra $O\sigma$, le point σ' étant ſuppoſé donné.

26. Il faut de plus remarquer que ſi le point T ne ſe trouvoit point ſur la cauſtique σT, mais qu'il fût ſur la tangente à l'extrêmité de cette cauſtique, comme dans la Fig. 35, où Y eſt au-delà de r, alors le problême pour déterminer le point T ou σ, ſeroit encore plus facile, & il faudroit employer une méthode analogue à celle dont on s'eſt ſervi pour déterminer le point V, par l'interſection des deux tangentes extrêmes NV, VrR.

27. Nous avons ſuppoſé, pour plus de facilité, toutes

les cauſtiques égales & ſemblables dans les recherches précédentes. Mais il eſt clair que, quand on voudroit avoir égard à la petite différence qui eſt entr'elles, & à la divergence très-petite des rayons rouges & violets qui partent de l'extrémité de la lentille, le problême ſe réſoudroit abſolument par les mêmes conſtructions & les mêmes méthodes, & que les calculs analytiques ſeroient ſeulement un peu plus compliqués.

28. Nous n'avons conſidéré juſqu'ici que les rayons parallèles entr'eux & à l'axe. Suppoſons préſentement que les rayons ſoient toujours parallèles entr'eux, mais inclinés à l'axe, & pour plus de facilité ſuppoſons que l'angle ABC (Fig. 39, n°. 2) de ces rayons avec l'axe CB ſoit très-petit, par exemple, de $16'$ pour le Soleil. On ſait, par la Dioptrique, que ſi on prolonge AB en R, de maniere que RR' ſoit perpendiculaire à BR, & que R ſoit le foyer des rayons rouges parallèles à l'axe, & infiniment proches de cet axe, R' ſera à très peu près le foyer des rayons rouges qui font avec l'axe un angle $= ABC$. Faiſant donc ſur cet axe AR' les mêmes opérations que ſur l'axe AR dans les Figures précédentes, on trouvera de même la plus petite image pour cet axe AR, & les couleurs de cette image; de plus, il eſt clair que cette image ſera placée à très-peu près dans le plan & dans la direction de l'image ON (Fig. 33). Connoiſſant donc la partie blanche de chacune des deux images, la partie colorée de chacune, & la poſition des axes AR', CR (Fig. 39,

n°. 2) qui diviſent ces deux images par leur centre, on connoîtra aiſément la largeur de l'image totale, & les couleurs de ſes différentes parties; ce qui eſt trop facile pour que nous nous y arrêtions.

29. Au lieu de ſuppoſer les rayons parallèles, ſi on ſuppoſe qu'ils partent d'un point quelconque pris dans l'axe ou hors de l'axe, on connoîtra par une méthode abſolument ſemblable, les images formées dans cette hypothèſe, c'eſt un détail que nous abandonnons à nos Lecteurs.

30. Suppoſons qu'il n'y ait qu'une ſeule eſpece de rayons colorés, & que AB ſoit l'aberration de ſphéricité de ces rayons, en ſorte que A (Fig. 40) ſoit le foyer des rayons infiniment proches de l'axe, & B le foyer des rayons qui paſſent par l'extrêmité de la lentille, à la diſtance $\mathfrak{C}$ de l'axe, on aura d'abord $AB = \mathfrak{d}\mathfrak{C}^2$, $\mathfrak{d}$ étant connu par ce qui précede. Soit enſuite C le point qui ſe peint exactement au fond de l'œil, & $AC = mAB = m\mathfrak{d}\mathfrak{C}\mathfrak{C}$; ſoit enſuite $AD = \mathfrak{d}xx$, ce qui donne $CD = m\mathfrak{d}\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{d}x^2$, l'aberration du point D au fond de l'œil ſera proportionnelle (Voyez Tome III de nos *Opuſc.* XVIIIe Mém.) à CD multiplié par l'angle que fait au point D le rayon qui paſſe par ce point, angle qui eſt évidemment proportionnel à x, & qu'on peut ſuppoſer $= x$, en faiſant $R = 1$, donc l'aberration du point D ſera $(m\mathfrak{d}\mathfrak{C}\mathfrak{C} - \mathfrak{d}x^2)x = m\mathfrak{d}\mathfrak{C}^2x - \mathfrak{d}x^3$, qui ſera un *maximum* quand x^2 ſera $= \frac{m\mathfrak{C}\mathfrak{C}}{3}$, & la valeur de ce

maximum ſera $\frac{2m\sqrt{cc}}{3}\sqrt{\left(\frac{mcc}{3}\right)}=\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}\times \sqrt{C^3}$. Enfin l'aberration au point B ſera $=C\times BC=(1-m)\sqrt{C^3}$. Or comme l'aberration au point B diminue à meſure que le point C monte vers B, & qu'au contraire l'aberration CD augmente, il eſt clair que l'aberration ſera la moindre quand ces deux quantités d'aberration ſont égales, ce qui donne $1-m=\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}$, d'où $m=\frac{3}{4}$. Ce qui s'accorde avec la théorie précédente, puiſqu'on a vu que $AB=\frac{3}{4}AO$, (r étant le point où la cauſtique eſt touchée par les rayons extrêmes) & que le point C où eſt la plus petite image donne $AC=\frac{1}{4}AO$. D'où $AC=\frac{1}{4}AB$.

31. Soit AK la demi-ouverture, N (Fig. 41) le foyer des rayons rouges infiniment proches de l'axe, L celui des rayons rouges qui viennent de K, en ſorte que LN ſoit l'aberration de ſphéricité des rayons rouges; alors prenant $LO=$ à l'aberration de réfrangibilité, il eſt clair que O ſera le point par où paſſeront les rayons violets venans de K, & que $NO=NL+LO$ ſera l'aberration longitudinale totale.

32. Tous les points entre O & L recevront donc des rayons venans de K; mais les points entre L & N n'en recevront que des points placés entre A & K. Soit u un point de LN; le point le plus éloigné de A & le plus proche de K qui enverra des rayons en u ſera k, ku étant le rayon qui touche la cauſtique NmM

en m; & uN ſera l'aberration de ſphéricité pour le rayon qui paſſe par k. Tous les autres rayons paſſant par u, donneront une ouverture Ak plus petite.

33. Donc, 1°. ſi on ſuppoſe entre O & L un point i qui ſe peigne exactement au fond de l'œil, comme le rayon qui paſſe par i vient de k, l'aberration de l'image du point O au fond de l'œil (que j'appellerai l'*aberration oculaire*), ſera proportionnelle à $Oi \times Ak$. 2°. Si on prend un point u entre L & N, l'aberration oculaire en u ſera proportionnelle à $iu \times Ak$. Soit $Li = \mathfrak{C}'$, $uL = u$, (d'où $ui = \mathfrak{C}' + u$), $LN = \mathfrak{s}\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ (AK étant $= \mathfrak{C}$), enfin $Ak = x$, on aura $uN = \mathfrak{s}xx = \mathfrak{s}\mathfrak{C}\mathfrak{C} - u$; donc $x^2 = \mathfrak{C}\mathfrak{C} - \frac{u}{\mathfrak{s}}$, & l'aberration oculaire en u, $ui \times x = (\mathfrak{C}' + u)\sqrt{\left(\mathfrak{C}\mathfrak{C} - \frac{u}{\mathfrak{s}}\right)}$. Suppoſons $u = 0$, ce qui fait tomber le point u en L, l'aberration oculaire en L ſera $= \mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, & ſuppoſons u infiniment petite, l'aberration ſera $(\mathfrak{C}' + u)\left(\mathfrak{C} - \frac{u}{2\mathfrak{s}\mathfrak{C}}\right)$ $= \mathfrak{C}\mathfrak{C}' + u\mathfrak{C} - \frac{u\mathfrak{C}'}{2\mathfrak{s}\mathfrak{C}}$, qui ſera évidemment $= \mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ ſi $2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{s} = \mathfrak{C}'$, $> \mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ ſi $2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{s} > \mathfrak{C}'$, & $< \mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ ſi $2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{s} < \mathfrak{C}'$.

34. Or ſi on ſuppoſe que le point de la plus grande aberration oculaire ſoit en u, au-delà de L, entre L & N, il eſt néceſſaire que l'aberration en L ſoit $<$ que l'aberration en u.

35. Donc il eſt néceſſaire que $2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{s}$ ſoit $\geqslant Li$ pour

que la plus grande aberration oculaire, d'un côté du point i, tombe entre L & N. (Nous verrons plus bas ce qui arrivera ſi $2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{N} < Li$.)

36. Or $2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{N} = 2LN$, donc ſi $2LN = Li$, l'aberration oculaire en L ſera un *maximum*, i étant ſuppoſé le point qui ſe peint exactement au fond de l'œil; ſi $2LN > Li$, l'aberration oculaire ne ſera pas un *maximum* au point L, & le ſera pour quelque point u placé entre L & N.

37. De plus, tandis que l'aberration oculaire va en croiſſant de i en u, & qu'elle eſt un *maximum* en u, il eſt clair qu'elle va auſſi en croiſſant de i en o, & qu'elle eſt un *maximum* en O, & que pour que cette aberration *maxime* ſoit la plus petite au fond de l'œil qu'il eſt poſſible, il faut que les deux aberrations ſoient égales; comme dans le cas ci-deſſus (art. 31), où l'on a conſidéré les rayons d'une ſeule couleur.

38. Soit donc maintenant $OL = \mathfrak{N}'$, on aura $Oi = \mathfrak{N}' - \mathfrak{C}'$, & l'aberration oculaire en O ſera $= Oi \times AK = (\mathfrak{N}' - \mathfrak{C}')\mathfrak{C}$, laquelle doit être = à l'aberration $(\mathfrak{C}' + u)\sqrt{\left(\mathfrak{C}\mathfrak{C} - \frac{u}{\mathfrak{r}}\right)}$, cette derniere aberration elle-même étant un *maximum*.

39. Cherchant donc la valeur de u qui donne $(\mathfrak{C}' + u)\sqrt{\left(\mathfrak{C}\mathfrak{C} - \frac{u}{\mathfrak{r}}\right)}$ = à un *maximum*, on aura $\frac{1}{\mathfrak{C}' + u} = \frac{1}{\mathfrak{r}\left(\mathfrak{C}\mathfrak{C} - \frac{u}{\mathfrak{r}}\right)}$, ou $2\mathfrak{r}\mathfrak{C}\mathfrak{C} - 2u = \mathfrak{C}' + u$, & $u =$

$\frac{2\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C}-\mathcal{C}'}{3}$. Mettant cette valeur de u dans l'aberration $(\mathcal{C}'+u)\times\sqrt{\left(\mathcal{C}\mathcal{C}-\frac{u}{\mathcal{N}}\right)}$, & égalant enſuite cette quantité à $(\mathcal{N}'-\mathcal{C}')\mathcal{C}$, on aura la valeur de $\mathcal{N}$; ce qui donnera l'équation $\left(\frac{2\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C}+2\mathcal{C}'}{3}\right)\times\sqrt{\left(\frac{\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C}+\mathcal{C}'}{3\mathcal{N}}\right)}=\mathcal{N}'\mathcal{C}-\mathcal{C}\mathcal{C}'$, d'où l'on tirera $\mathcal{C}'$.

40. De plus, il eſt néceſſaire, pour pouvoir réſoudre cette équation, & trouver une valeur poſſible de u, que Li ſoit $<$, ou du moins égal à la moitié de LO, car ſi Li étoit $>\frac{LO}{2}$, alors les images en O & en L étant entr'elles comme Oi à iL, l'aberration O ſeroit moindre que l'aberration en L, & comme l'aberration en L (*hyp.*) eſt $<$ que l'aberration en u, il eſt clair que l'aberration en O ne pourroit alors être égale à l'aberration en u.

41. C'eſt d'ailleurs ce qu'on voit aiſément par la valeur de $u=\frac{2\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C}-\mathcal{C}'}{3}$, qui donne $2\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C}=\mathcal{C}'$ lorſque $u=0$; & $\mathcal{C}\mathcal{C}'=\mathcal{N}'\mathcal{C}-\mathcal{C}'\mathcal{C}$, ou $\mathcal{N}'=2\mathcal{C}'$, c'eſt-à-dire, $OL=2Li=4\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C}=4LN$. Donc ſi $2LN$ eſt $=\frac{LO}{2}$, alors $2LN$ ſera $=Li$; le point u ſera placé en L, u étant $=0$; & l'aberration oculaire ſera $A\mathcal{C}\mathcal{C}'$, A étant un coefficient qui dépend de la conformation & de la réfraction des humeurs de l'œil, & ſi $2LN$ (Fig. 41, n°. 2) eſt $>\frac{LO}{2}$, ou Li' (en ſuppoſant $Li'=$

Digitized by Google

$Li' = \frac{LO}{2}$), alors on aura à plus forte raiſon $2LN > Li$, donc prenant un point i très-près de i' & au-deſſous, l'aberration oculaire en i' ſera > qu'en i (art. 33), & par conſéquent la plus grande aberration oculaire ſera (art. 36) en quelque point u entre L & N.

42. Mais ſi $2LN$ eſt $< \frac{LO}{2}$; alors prenant Li tant ſoit peu plus petite que $\frac{LO}{2}$, il eſt clair qu'on pourra avoir encore $2LN < Li$, & par conſéquent ſi on ſuppoſe que l'aberration oculaire en i ſoit $= 0$, l'aberration oculaire en L ſera > (art. 33) que dans les points très-proches de L & au-deſſous; il ne faudra donc plus chercher le *maximum* d'aberration oculaire dans la ligne LN; & il eſt évident pour lors en plaçant le point i au milieu de la ligne LO, que ce point i ſera celui qui étant peint au fond de l'œil, donnera les deux aberrations égales pour le point O & pour le point L. On pourroit objecter cependant que dans le cas où $2LN$ eſt $\leq \frac{LO}{2}$, ſi on prend $Li < \frac{LO}{2}$, & tel que $2LN$ ſoit $> Li$, alors il ſeroit poſſible de trouver au-deſſous de L un point u tel que les aberrations oculaires en O & en L fuſſent égales, l'image diſtincte étant ſuppoſée en i. Mais en ce cas, ces deux aberrations ſeroient plus grandes que l'aberration oculaire en O, l'image diſtincte étant ſuppoſée au point milieu i de LO, & l'image

diſtincte *reelle*, doit en ce cas être au point *i* qui donne l'aberration oculaire plus petite.

43. On peut remarquer qu'en général, ſi le point *i* (Fig. 42) eſt celui qui ſe peint exactement au fond de l'œil en *a*, & que les points *o*, *u*, ſe peignent, le premier en-deçà de la retine en *d*, le ſecond au-delà en *e*, *MN* étant la prunelle (ou partie de la prunelle, car il n'eſt pas néceſſaire que *KN* & *KM* ſoient égales) & *ac* étant l'image ou l'aberration oculaire formée des deux aberrations égales (*hyp.*) aux points *o* & *u*, on aura *oi* : *iu* :: *ae*. *ad*, $ae = \frac{KN \times ad}{aK}$, & auſſi $= \frac{KM \times ac}{aK}$, donc *KN* − *KM* : *ae* − *ad* :: *iu* : *oi*, d'où il eſt aiſé de conclure que les points *M*, *u*, *Z* ſeront ſenſiblement en ligne droite, *iZ* étant perpendiculaire à *Ou*, & qu'ainſi le point *Z* ſe peindra au fond de l'œil en *C*, comme le point *i* en *a*, donc l'image *iZ* ſe peindra au fond de l'œil comme ſe peindroit à l'œil nu un objet placé en *iZ*.

44. On peut remarquer encore en paſſant que dans l'art. 464 du troiſiéme volume de nos *Opuſcules* (dont je ſuppoſe qu'on ait ici la figure ſous les yeux), ſi au lieu de λ', qu'on peut ne pas ſuppoſer = à toute la largeur de la prunelle, on met ſa valeur $\frac{AO \times Ba}{Aa}$, on aura l'aberration au fond de l'œil, proportionnelle à $\frac{AO}{BA}$, ce qui ſimplifiera beaucoup les calculs.

45. Tous les réſultats de cette recherche ſur l'aberration oculaire de l'image, & ſur la véritable image

du fond de l'œil, s'accordent parfaitement, comme il eſt aiſé de voir, avec celle que nous avons donnée ci-deſſus du même problême, par l'interſection des cauſtiques, ou des limites mixtilignes des images des rayons rouges & des violets.

46. En effet, nous avons vu, 1°. que r étant le point où la cauſtique (Fig. 35) eſt touchée par les rayons rouges extrêmes, on a $KV = 2RV$, 2°. que $RV = \frac{1}{4}\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C}$; d'où $KV = 2\frac{1}{4}\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C}$; 3°. il eſt clair que RV' eſt égale à l'aberration de réfrangibilité, & que RV eſt = à $V'N'$, puiſque N' eſt le point par où paſſent les rayons violets extrêmes. Donc VN' eſt = à l'aberration de réfrangibilité; c'eſt-à-dire, à $\mathcal{N}'$. Donc puiſque $TV = \frac{1}{2}VN' = \frac{1}{2}\mathcal{N}'$, il eſt clair, 1°. que ſi l'interſection Y eſt au-delà de r, on aura TV ou $\frac{1}{2}\mathcal{N}' > KV > 2\frac{1}{4}\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C}$, c'eſt-à-dire, $4\frac{1}{4}\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C} < \mathcal{N}'$, & le point T qui donne la vraie image ſera donné par l'interſection des tangentes extrêmes $N'Y$, VrY, comme on l'a vu ci-deſſus. 2°. Si $4\frac{1}{4}\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C} = \mathcal{N}'$, les points V & r ſe confondront, & le point de l'image ſera en K. 3°. Enfin, ſi $4\frac{1}{4}\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{C} > \mathcal{N}'$, le point de la véritable image ſera donné par l'interſection de la cauſtique Rr avec le rayon violet extrême $N'V$, qui pour lors coupera cette cauſtique entre R & r (Fig. 37), par exemple, en N, & il n'eſt pas difficile de voir que l'équation qui réſultera de cette interſection, ſera préciſément la même que l'équation $(\mathcal{N}' - \mathcal{C}')\mathcal{C} = (\mathcal{C}' + u) \times \sqrt{\left(\mathcal{C}\mathcal{C} - \frac{u}{r}\right)}$

trouvée ci-deſſus. En effet, on aura, en faiſant $Vu = u$, (Fig. 37) & $OV = \mathcal{C}'$, $\frac{(\mathcal{C}'-\mathcal{C}')\mathcal{C}}{R} = ON = \frac{Ou}{R}$ multiplié par l'ouverture x ou $\sqrt{\left(\mathcal{C}\mathcal{C} - \frac{u}{\rho}\right)}$, qui répond au rayon tangent N. Or $Ou = OV + Vu = \mathcal{C}' + u$. Donc on aura l'équation $(\mathcal{C}'+u)\sqrt{\left(\mathcal{C}\mathcal{C} - \frac{u}{\rho}\right)} = (\mathcal{P} - \mathcal{C}')\mathcal{C}$, préciſément la même que celle de l'article 39.

47. La maniere dont nous avons trouvé par les méthodes précédentes l'aberration cauſée par une ſeule lentille objective, peut évidemment s'appliquer a l'aberration cauſée par un objectif & un oculaire. Car dans l'une & l'autre des deux méthodes, il n'y a qu'à diſtinguer pour l'oculaire, comme on a fait pour l'objectif, les deux aberrations NL & LO (Fig. 41, n°. 2) de ſphéricité & de réfrangibilité, & ſuivre d'ailleurs exactement les mêmes procédés.

48. Si on nomme ρ la diſtance du foyer de l'oculaire à ce même oculaire, & x les différentes ouvertures de la lunette, il n'eſt pas difficile de voir que le foyer d'un rayon quelconque ſera donné par la valeur $\rho + \nu dP + \mu xx$, les quantités ν & μ, faiſant ici la même fonction que α & $\mathcal{P}$ dans l'objectif. Les diſtances de l'oculaire & de l'objectif étant donc ſuppoſées données, ainſi que la diſtance de l'œil à l'oculaire, quand on aura trouvé par les méthodes précédentes, le point de la véritable

image, & l'aberration de cette image au fond de l'œil, alors il faudra chercher quelle doit être la diſtance de l'oculaire à l'objectif, & celle de l'œil à l'oculaire, pour que cette aberration au fond de l'œil ſoit la moindre qu'il eſt poſſible ; & pour que, par conſéquent, l'image ſoit la plus diſtincte. Pour cela, on réſoudra d'abord le problême en regardant comme conſtante une de ces deux diſtances, que j'appelle D & D' ; par exemple, on ſuppoſera D' conſtant, & on aura une équation en D, d'où l'on tirera la valeur de D & celle de l'aberration oculaire *minime*, exprimées en D', enſuite on fera cette derniere expreſſion un *minimum*, & on aura une équation en D', d'où l'on tirera aiſément D' & enſuite D. Cette recherche, que d'autres Géométres pourront aiſément pouſſer plus loin, peut être fort utile pour perfectionner la théorie des oculaires.

49. La méthode que nous avons donnée dans les recherches précédentes pour trouver la largeur du foyer d'une lentille, peut s'appliquer à d'autres cas avec beaucoup de facilité. Soit, par exemple, DAB (Fig. 43), un miroir ardent, ſur lequel les rayons tombent parallélement à AC, & dans lequel AB ſoit plus petit que AD. Ayant fait $CG = \frac{AC}{2}$ (C étant le centre du miroir), & ayant décrit les cauſtiques GH & GK, & mené les rayons réfléchis EF, Li, qui viennent des extrêmités B, D du miroir, il eſt clair, par la théorie précédente, que tous les rayons réfléchis ſeront

compris dans l'eſpace renfermé par les lignes mixtes LaH, EgK, & on voit par la ſeule inſpection de la figure que ga eſt la moindre ligne perpendiculaire à CA, qu'on puiſſe tirer entre ces deux eſpaces. Donc cette ligne ga eſt le lieu du foyer.

50. Imaginons préſentement que le miroir MB, (Fig. 44) dans lequel $MB = MD$, ſoit expoſé directement au Soleil, & ayant fait les angles MCA, MCA', chacun de 16′, parce que le diametre du Soleil eſt de 32, il eſt clair que tous les rayons qui viennent des bords du Soleil, ſeront parallèles, ou cenſés parallèles à CA, CA', & que tous ceux qui viennent du centre ſeront parallèles ou cenſés parallèles à CM. Faiſant donc Cb & Cg égales à la moitié du rayon, & décrivant les cauſtiques bO, gL, on trouvera aiſément que ſi a eſt la largeur du foyer pour les ſeuls rayons qui viennent du centre, la largeur du foyer total ſera à très-peu près $a +$ la petite ligne gab, laquelle eſt égale à 32′ multipliée par la moitié du rayon. Le calcul rigoureux ſeroit plus compliqué, mais facile à faire. On voit ſeulement que la conſidération du diametre du Soleil agrandit beaucoup le foyer. Pour s'en convaincre, il ſuffit de ſe rappeller que ſi r eſt le rayon d'un miroir, & la moitié de ſa largeur, l'aberration longitudinale ſera (Tom. III, *Opuſc.* pag. 76) $\frac{c^4}{4r}$, & la largeur du foyer $= \frac{2 \times c^4}{4 \cdot 4r} \times \frac{c \cdot 2}{r} = \frac{c^3}{4r^2}$, pour

les rayons qui partent du centre du Soleil. Or le diamètre du Soleil ajoute à cette largeur de chaque côté une quantité à peu-près égale à $\frac{r}{2} \times \frac{32'}{\text{fin. tot.}} =$ à très-peu-près $\frac{r}{2} \times \frac{32'}{5760} = \frac{r}{2} \times \frac{1}{320} \times \left(1 + \frac{1}{25} + \frac{1}{50}\right)$.

51. Il eſt aiſé de voir par la théorie précédente, que dans toute ligne perpendiculaire à l'axe, qui joint les deux cauſtiques, & qui repréſente le foyer, les rayons ſont plus ſerrés à l'extrémité de cette ligne, dans l'endroit où elle rencontre la cauſtique, parce que dans tout autre point de cette ligne, il ne paſſe que deux rayons venans l'un d'un côté de l'axe, l'autre de l'autre côté, au lieu que dans chaque point de la cauſtique il paſſe au moins très-ſenſiblement tous les rayons qui viennent du petit arc du verre ou du miroir répondant à ce point de la cauſtique. D'où il s'enſuit que ſi on expoſe un corps perpendiculairement à l'axe d'un verre ou d'un miroir, un peu au-deſſus ou au-deſſous du point où ſe réuniſſent les rayons proches de l'axe, l'inflammation doit ſe faire d'abord à la circonférence, & ne commencera par le centre que dans le cas où le corps ſera placé au foyer même des rayons proches de l'axe, ce qui eſt conforme à l'expérience. C'eſt l'explication que j'ai donnée de cette expérience au mois de Mai 1778, dans une Aſſemblée de l'Académie, où on propoſe d'en donner la raiſon.

52. Nous ajouterons ici quelques remarques ſur les

couleurs produites par la réfraction, même dans un verre plan, & ſur le ſpectre ſolaire formé par la réfraction dans une chambre obſcure. Si un rayon blanc FD, que je ſuppoſe d'une épaiſſeur infiniment petite tombe ſur un verre plan, il ſe dilatera par la premiere réfraction dans l'eſpace MN (Fig. 45), le rouge étant vers M, & le violet vers N, & cet eſpace ſera d'autant plus grand que le verre ſera plus épais. C'eſt ce que j'ai déja remarqué Tom. III de mes *Opuſc.* pag. 394.

53. Les rayons DM, DN ſortiront de ce verre plan ſuivant des lignes MQ, NO (Fig. 46), paralèles l'une à l'autre, & à la premiere poſition du rayon incident. Si on les reçoit de-là ſur un ſecond verre de la même épaiſſeur, il eſt aiſé de voir que le rayon ſe dilatera du double par la ſeconde réfraction, & ainſi de ſuite, en ſorte que le rouge ſera toujours vers le côté MQ, le violet vers le côté NO, & que les différentes couleurs dont le rayon eſt compoſé à l'infini, ſeront par conſéquent du double plus ſenſibles.

54. D'où il eſt clair qu'en multipliant les verres plans parallèles, ou en ſuppoſant un ſeul verre plan d'une épaiſſeur égale à la ſomme des épaiſſeurs de tous ces verres, la dilatation ſera la même.

55. La ligne MN eſt aiſée à calculer ſuivant la valeur de l'angle d'incidence, celle du rapport des ſinus, & l'épaiſſeur du verre.

56. Par exemple, ſi on mène la perpendiculaire DR (Fig. 45) aux deux faces du verre, & qu'on ſuppoſe

$\frac{52}{77}$ pour la réfrangibilité des rayons rouges, & $\frac{52}{71}$ pour celle des rayons violets, on aura RM à RN à très-peu-près, comme 78 à 77. Soit $DR = 1$ pouce, & $RM = 2$ pouces, par exemple, ou 24 lignes, on aura $MN =$ environ $\frac{1}{3}$ de ligne, ce qui eſt peu de choſe, mais trois verres plans donneroient une ligne de largeur, & on pourroit appercevoir ſenſiblement le rouge à droite, & le violet à gauche.

57. Depuis que j'ai imprimé cette remarque ſur l'eſpece de dilatation que ſouffre un rayon ſimple réfracté par un verre plan, & ſur les couleurs qui doivent en réſulter, j'ai vu, ce que j'ignorois alors, que M. Newton avoit déja fait la même obſervation dans ſes *Lectiones Opticæ*, il ajoute même avec raiſon, que comme le Soleil n'eſt pas un point mathématique, non plus que le trou par lequel on fait paſſer les rayons, & chaque point du Soleil devant ainſi produire pour chaque point du trou, une eſpece d'image rectiligne oblongue & colorée vers ſes bords, d'un côté en rouge, de l'autre en violet, avec les couleurs intermédiaires placées entre ces deux bords, le mêlange & le rapprochement de toutes ces images, formeront une image blanche dans ſon milieu, & colorée vers ſes bords, ayant d'abord le rouge ſimple, puis le rouge avec l'orangé, puis le rouge avec l'orangé & le jaune, & ainſi de ſuite juſqu'au blanc, qui vers l'autre extrêmité ſe colorera de même par degrés en perdant d'abord le rouge, puis le rouge & l'orangé, puis le rouge,

l'orangé & le jaune, &c., & ainſi juſqu'au ſimple violet. C'eſt là ce que l'expérience doit donner.

58. Venons maintenant à la figure du ſpectre ſolaire, formé par la réfraction.

59. Je ſuppoſe que les rayons du Soleil (dont MN ſoit le diametre) tombent par un point D (Fig. 47) ſur un verre plan, & ayant ſes faces paralleles AD, BC; il eſt clair que s'il n'y avoit point de réfraction, l'image du Soleil ſe projetteroit ſur la face BC en forme d'ellipſe ou de cercle, ſavoir, d'ellipſe ſi le rayon SD eſt oblique au verre, & de cercle s'il y eſt perpendiculaire.

60. En vertu de la double réfraction à l'entrée & à la ſortie du verre, les rayons ſortent du verre parallélement à leur premiere poſition; on ſeroit peut-être tenté d'en conclure que l'image du Soleil, reçue ſur un plan FKH ſera elliptique, comme elle l'eut été s'il n'y avoit aucune réfraction. Mais on ſe tromperoit; il eſt aiſé de le prouver.

61. En effet, ſoit LRQ (Fig. 48) l'image elliptique qui ſeroit formée ſans réfraction ſur la face inférieure du verre, ſoit la diſtance des deux faces $DO = \alpha$, & nommant OL, r, & ζ l'angle ROL entre l'axe de l'ellipſe & le rayon r, l'équation de l'ellipſe ſera en général, comme l'on ſait, $rr\cos.\zeta^2 + Arr\sin.\zeta^2 + Br\cos.\zeta + C = 0$. Soit enſuite DP le rayon réfracté du rayon DL, $OP = \rho$, & $1 : m$ le rapport du ſinus d'incidence à celui de réfraction, en paſſant de l'air dans le verre, on aura

$1 : m^2 :: \frac{r^2}{a^2+r^2} \cdot \frac{\rho^2}{a^2+\rho^2}$, ou $\frac{a^2+\rho^2}{\rho^2} = \frac{a^2+r^2}{m^2 r^2}$; c'eſt-à-dire, $1 + \frac{a^2}{\rho^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{a^2}{m^2 r^2}$.

62. Préſentement ſi on mène Pd parallèle à LD, Pd repréſentera le rayon rompu au ſortir du verre, & on aura, en nommant Od, ζ, l'équation $\frac{r}{\rho} = \frac{a}{\zeta}$.

63. D'où l'on voit que comme r n'eſt pas à ρ en rapport conſtant, & que a eſt conſtant, ζ eſt par conſéquent variable, qu'ainſi tous les rayons émergens, quoique parallèles aux incidens, n'aboutiſſent pas en un ſeul point d, comme les rayons incidens en un ſeul point D; c'eſt pour cela que l'image, au ſortir du verre, n'eſt pas elliptique, comme elle le ſeroit s'il n'y avoit point de réfraction.

64. Pour trouver l'équation de cette image, ſoit $OK = k$, & l'on verra aiſément, qu'en prenant dans cette nouvelle image le point K pour le ſommet des angles τ (égaux & correſpondans aux angles ζ) & pour le ſommet des ρ', on aura $\rho' : \rho :: \zeta + k : \zeta$, d'ou $\rho = \frac{\rho'\zeta}{\zeta+k}$; & comme on a déja $\zeta = \frac{a\rho}{r}$, on aura l'équation $1 = \frac{a\rho'}{a\rho+kr}$, & $\rho = \rho' - \frac{kr}{a}$. Donc $\rho' = \frac{kr}{a} + \rho$; la premiere partie $\frac{kr}{a}$, donne une ellipſe, dont les rayons ſont à ceux de l'ellipſe déſignée ci-deſſus (art. 61), comme k eſt a. Mais le rayon ρ n'étant

pas celui d'une ellipſe, comme il eſt aiſé de le voir en comparant l'équation $1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{\alpha^2}{m^2 r^2}$, avec l'équation $rr \cos.\zeta^2 + Arr \sin.\zeta^2 + Br \cos.\zeta + C = 0$, il eſt évident que la courbe cherchée n'eſt pas elliptique.

65. Au reſte, on voit aiſément par l'équation $\rho' + \frac{k\zeta}{\alpha} = \rho$, ou $\rho' = \frac{k\zeta}{\alpha} + \rho$, que la courbe dont le rayon eſt ρ, & qui eſt formée par la premiere réfraction, étant donnée, on aura très-aiſément la courbe dont le rayon eſt ρ', en ajoutant aux rayons $\frac{k\zeta}{\alpha}$ (qui appartiennent à une ellipſe), les rayons ρ correſpondans au même angle ζ.

66. Si on met dans l'équation $1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{\alpha^2}{m^2 r^2}$, au lieu de ρ ſa valeur $\rho' - \frac{kr}{\alpha}$, au lieu de r^2 ſa valeur $\frac{1 - C - Br \cos.\zeta}{\sin.\zeta^2 + A \cos.\zeta^2}$, on aura une équation où r ne ſe trouvera plus qu'au premier degré, & d'où l'on tirera la valeur de r, qui étant ſubſtituée dans l'équation en r & en ζ, donnera l'équation en ρ' & en ζ de la projection ou image du ſpectre.

67. Si la projection elliptique formée ſur la ſurface BC (Fig. 47), ſans réfraction, avoit ſon centre en O, c'eſt-à-dire, ſi le rayon SD étoit perpendiculaire au verre, alors cette projection ſeroit un cercle qui au-

roit O pour centre, on auroit $A = 1$, $B = 0$, $r =$ à une conſtante, & ρ auſſi égale à une conſtante, ainſi que r, & l'image ſeroit circulaire au ſortir du verre, ce qui ſe voit d'ailleurs aiſément.

68. Comme l'image formée en FK, n'eſt pas elliptique, elle peut très-bien n'avoir pas, ainſi que l'ellipſe, deux parties égales & ſemblables au-deſſus & au-deſſous de la ligne qui paſſe par ſon centre perpendiculairement à ſon axe. Ainſi, en ne ſuppoſant même qu'une ſeule eſpece de rayons & de réfrangibilité, les différentes images formées par la chûte des rayons ſolaires ſur les différens points du trou, ne ſeroient pas exactement terminées par des droites parallèles.

69. Et ſi de plus on a égard à la variabilité de m pour les rayons de différentes couleurs, on voit que les images formées par ces rayons, même pour un ſeul trou infiniment petit D, ne ſeront pas les mêmes, & qu'ainſi les limites du ſpectre ne ſeront pas, au moins exactement, une ligne droite.

70. Il en ſera de même, à plus forte raiſon, pour le priſme, le calcul en eſt ſeulement un peu plus compliqué, mais d'ailleurs facile à faire, on déterminera aiſément la figure de chaque image du Soleil formée par des rayons de réfrangibilité donnée, & paſſant par un point du trou, & on déterminera enſuite, par les méthodes connues, la courbe qui touche toutes ces images, & qui donnera le contour du ſpectre.

71. Dans le Tom. III de nos *Opuſc.* pag. 393, nous

avons remarqué que ſi la lumiere n'étoit pas compoſée de rayons différemment réfrangibles à l'infini, il y auroit dans le ſpectre formé par le priſme des intervalles non lumineux. Il faut cependant remarquer, que ſi ces intervalles, pris par rapport à un ſimple & unique rayon, étoient peu conſidérables, c'eſt-à-dire, ſi le papier ſur lequel on reçoit l'image du ſpectre étoit aſſez près du trou, alors, comme le Soleil n'eſt pas un ſimple point, non plus que le trou, les images formées par chaque point du Soleil & chaque point du trou, ſe couvrant en partie les unes les autres, les eſpaces non éclairés pourroient diſparoître.

72. Quoique la plûpart des Phyſiciens ſemblent perſuadés que M. Newton n'a admis que ſept couleurs différentes, chacune homogène & pure, & ne ſouffrant par les réfractions réitérées aucune altération ; ce grand homme néanmoins, paroît avoir reconnu, en pluſieurs endroits de ſon *Optique* & de ſes *Leçons Optiques*, que le ſpectre n'eſt pas formé ſeulement des ſept couleurs déſignées dans tous les Livres de Phyſique, mais qu'il eſt formé par des rayons rompus ſuivant tous les rapports poſſibles, depuis le rouge le plus vif juſqu'au violet le plus foncé. Il obſerve même que ſi la lumiere n'étoit pas compoſée de couleurs ou de rayons différemment réfrangibles à l'infini, en ce cas le ſpectre ne ſeroit pas terminé par deux droites parallèles. Cette remarque, quoique très-juſte en elle-même, ne paroît pas rigoureuſe-

ment démonſtrative ; 1°. parce que le ſpectre, comme nous l'avons obſervé & prouvé ci-deſſus, n'eſt pas & ne ſauroit être terminé rigoureuſement par des lignes droites parallèles ; 2°. parce que la largeur du trou donnant différentes images (indépendamment même de la diverſe réfrangibilité des rayons) il en réſulteroit déja un ſpectre allongé & terminé en partie par des droites parallèles, ce qui pourroit rendre moins ſenſible le non parallélifme des lignes terminantes dans les parties du ſpectre qui proviendroient des différentes couleurs. 3°. Enfin, parce que la terminaiſon du ſpectre à droite & à gauche n'eſt pas aſſez nette, aſſez tranchante, & la réfrangibilité de deux couleurs voiſines aſſez différente, pour que la non rectitude des lignes terminantes pût être bien ſenſible. Il me ſemble qu'on peut trouver une preuve plus ſatisfaiſante de la réfrangibilité indéfinie & non diſcontinue des rayons de lumiere, par les ombres qui ſépareroient, comme nous l'avons remarqué, les parties du ſpectre, s'il n'y avoit qu'un nombre déterminé de couleurs primitives.

73. Quoi qu'il en ſoit, on peut être étonné, ce me ſemble, que M. Newton ayant reconnu que la lumiere étoit compoſée d'une infinité de rayons tous diverſement réfrangibles par degrés contigus & inſenſibles, ait diſtingué ſept couleurs, plutôt que d'avoir dit ſimplement qu'il y en a un nombre indéfini, qu'il ait diviſé le ſpectre en même raiſon que le monocorde, puiſque cette diviſion eſt purement précaire & arbitraire,

s'il y a des couleurs à l'infini ; enfin qu'il ait ſemblé admettre une lumiere homogène & non altérable par la réfraction, puiſqu'il n'y a point de rayon qui ne puiſſe, par la réfraction, ſe diſperſer en une infinité d'autres, & que la lumiere eſt ſuſceptible de degrés de réfraction à l'infini, renfermés, il eſt vrai, entre les limites de la réfraction du rouge le plus vif, & du violet le plus foncé. Il ſemble que ſi M. Newton s'étoit exprimé de la ſorte, les Phyſiciens n'auroient point été induits en erreur (au moins pour la plûpart) ſur le nombre des couleurs primitives, & en auroient reconnu une infinité.

74. En finiſſant ces recherches, nous invitons les Phyſiciens à vérifier par des expériences, les différens objets dont nous avons parlé dans les Mémoires de l'Académie de 1767, pag. 95, §. VII, entr'autres, ſur l'exactitude du rapport des ſinus, & ſur celles de quelques autres loix de la réfraction. Nous les invitons même à s'aſſurer exactement ſi un rayon qui a traverſé un verre plan, ſort exactement parallèle à ſa premiere poſition ; car enfin, ce paralléliſme n'eſt pas démontré rigoureuſement par la théorie, comme nous l'avons obſervé dans le Tome V de nos *Opuſcules*, XLIIIe Mém. §. VI, art. 27, pag. 466. Ce même Mémoire, & le XXe Mémoire imprimé dans nos *Opuſcules*, Tom III, contiennent pluſieurs autres remarques ſur la théorie & les phénomènes de la réfraction, qui nous paroiſſent mériter quelqu'attention de la part des Phyſiciens

ſiciens Géomètres, nous les invitons d'autant plus volontiers à les examiner, que ces remarques ne contiennent guère que de ſimples queſtions propoſées en forme de doutes, dont l'éclairciſſement ne pourra que contribuer au progrès de l'Optique.

LV. MÉMOIRE.

Recherches ſur différens Sujets.

§. I.

Sur le mouvement des corps peſans, en ayant égard à la rotation de la Terre autour de ſon axe.

L'EXTRAIT de ce Mémoire a été lu à l'Académie le 6 Septembre 1771, & inſéré dans l'Hiſtoire de cette même année, pag. 10. Mais comme les différentes propoſitions énoncées dans cet extrait, n'y ſont point accompagnées de leurs démonſtrations, j'ai cru, quoique ces démonſtrations ne ſoient pas fort difficiles, qu'on me permettroit de les joindre ici, pour épargner aux Géomètres la peine de les chercher. Les calculs qu'on va lire avoient été remis au Secrétaire de l'Académie dès le 22 Décembre 1770.

1. Soit AaE (Fig. 49) l'équateur, C le centre de la terre, G la viteſſe de rotation de la terre, & par conſéquent du point A autour du centre C, $CA = a$; ſoit auſſi un corps grave lancé perpendiculairement de A

vers F, avec la viteſſe γ dans le plan de l'équateur AaE. Il eſt clair, 1°. que ce corps recevra en même-temps horiſontalement une viteſſe $=G$ par la main ou l'inſtrument qui le lance; 2°. qu'en vertu de ces deux viteſſes, il aura une viteſſe de projection abſolue g, & qu'il décrira en conſéquence la portion d'ellipſe ABa, dont le foyer ſera en C; 3°. que le temps employé par le corps A à décrire l'arc elliptique ABa, ſera au temps employé par le point A de la terre à décrire l'arc circulaire Aa, comme le ſecteur elliptique $ABaC$ eſt au ſecteur circulaire ACa; or il eſt viſible que $ABaC > ACa$, d'où il s'enſuit que quand le corps grave ſera en a, le point A de la terre ſera un peu plus loin que a, c'eſt-à-dire, en α, de maniere que $AC\alpha = ABaC$; & qu'ainſi, comme la terre tourne d'occident en orient, le corps grave A retombera en un point a, plus occidental que le point A, qui eſt arrivé en α.

2. Nous verrons bientôt quelle doit être la différence des arcs $Aa, A\alpha$, mais avant que de l'aſſigner, ſuppoſons qu'en général le corps A ſoit lancé obliquement ſuivant AH avec une viteſſe g, réſultante à-la-fois de la viteſſe qu'il reçoit de la rotation de la terre, & de celle que lui imprime la force qui le lance, ſoit le ſinus de l'angle $CAh = h$, M la maſſe de la terre, a, le demi-grand axe de l'ellipſe ou de la ſection conique décrite par le corps. On ſait, 1°. que $gg = \frac{2M}{a} - \frac{M}{a}$, 2°. que le

demi-parametre p du grand axe $= \frac{aagghh}{M}$, 3°. que ſi la ſection conique eſt une ellipſe, a ſera poſitif comme nous l'avons ſuppoſé, que ſi a eſt infini, la ſection ſera une parabole, qu'enfin ſi a eſt négatif, la ſection ſera une hyperbole. Soit donc la viteſſe abſolue de projection g, telle que $gg = 2p'K$, p' étant la peſanteur, ou $\frac{M}{aa}$ (car pour plus de ſimplicité & de facilité, nous ſuppoſons ici la terre ſphérique), on aura $\frac{2K'}{aa} = \frac{2}{a} - \frac{1}{a}$; d'où il s'enſuit que la ſection ſera une ellipſe, ſi $K' < a$, une parabole ſi $K' = a$, une hyperbole, ſi $K' > a$.

3. De plus, l'angle de projection HAC étant obtus, & C le foyer de la trajectoire, il eſt aiſé de voir, par les ſections coniques, que le ſommet B de la ſection doit tomber au-deſſous de A du côté h, oppoſé à H, ſi la ſection eſt parabolique ou hyperbolique, d'où il s'enſuit que ſi $K' =$ ou $> a$, le corps grave A ne doit jamais retomber ſur la ſurface de la terre.

4. Soit γ la viteſſe de projection verticale, & telle que $\gamma\gamma = 2p'\lambda = \frac{2M\lambda}{aa}$, G' la viteſſe abſolue horiſontale, en ſorte que $G' - G$ ſoit la viteſſe imprimée par la puiſſance qui a lancé le corps; il eſt aiſé de voir que $G' = gh$, & (en ſuppoſant $G'G' = 2p'\mu = \frac{2M\mu}{aa}$), on aura $gg = G'G' + \gamma\gamma = M\left(\frac{2\mu}{aa} + \frac{2\lambda}{aa}\right)$

$= \frac{2M}{a} - \frac{2}{a}$. Donc la ſection ſera parabolique ou hyperbolique ſi $\mu + \lambda$ eſt $=$ ou $> c$.

5. Soit maintenant $BO = 2a$ (Fig. 50), le grand axe de l'ellipſe BA, décrite par le corps grave, dans le cas où la ſection doit être elliptique, ſoit C le foyer inférieur de cette ellipſe, c'eſt-à-dire, le plus éloigné du ſommet B, (je prends le foyer inférieur, parce que l'angle de projection CAB eſt obtus), ſoit encore G le centre de l'ellipſe, BMO le demi-cercle circonſcrit, l'excentricité $GC = ma$, en ſorte que le demi-parametre $p = a(1 - mm)$. Ayant décrit l'arc AD du rayon $CA = a$, ſoit menée la perpendiculaire NAM à l'axe, & ſoient nommés les angles ACD, s, & BGM, u, on aura évidemment $NM = a$ ſin. u, $GN = a$ cof. u; AN que j'appelle $z = a$ ſin. $u . \sqrt{(1 - mm)}$, & ſin. $s = \frac{a \text{ ſin. } u \sqrt{(1-mm)}}{a}$. On aura de plus le ſecteur elliptique $BAC = BMC . \sqrt{(1 - mm)} = \frac{aa\sqrt{(1-mm)}}{2}(u + m \text{ ſin. } u)$, & le ſecteur circulaire $DAC = \frac{aas}{2}$, ou $\frac{aa}{2} \times$ l'angle dont le ſinus eſt $\frac{a \text{ ſin. } u \sqrt{(1-mm)}}{a}$.

6. Maintenant, pour que le corps retombe au même point d'où il a été lancé, il faut évidemment que le temps employé par ce corps à parcourir l'arc elliptique AB, & le temps employé par le point A de la terre à par-

courir l'arc circulaire AD ſoient égaux entr'eux. Or ces temps ſont entr'eux comme $\frac{\text{ſect. } ACB}{G'} : \frac{\text{ſect. } ACD}{G}$; donc, à cauſe de $G' = gh$, & de p ou $a(1-mm) = \frac{aagghh}{M}$, il eſt clair que ſi on ſuppoſe $GG = \frac{M}{a\lambda}$, on aura la proportion ſuivante : $a^2\sqrt{(1-mm)}(u+m \text{ ſin. } u) : a^2 \times \text{angl. dont le ſin.} = \frac{a \text{ ſin } u\sqrt{(1-mm)}}{a} ::$ $\frac{\sqrt{2}.\sqrt{(1-mm)}}{a} : \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$, ou $u+m \text{ ſin. } u : \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times$ angl. ſin. $\left(\frac{a \text{ ſin } u\sqrt{(1-mm)}}{a}\right) : \sqrt{\lambda} : \sqrt{a}$.

7. Cela poſé, la force centrifuge à l'équateur étant $\frac{M}{289aa}(a^1)$; on trouvera aiſément que $GG = \frac{M}{289a}$; & qu'ainſi $\sqrt{\lambda} : \sqrt{a} :: 17 : 1$. Voyons donc quelle doit être la viteſſe de projection pour que les deux premiers termes de la proportion précédente ſoient entr'eux comme 17 à 1.

8. Pour cela, on conſidérera d'abord que par la propriété de l'ellipſe on a en général tout rayon $CA = a(1+m \text{ cof. } u)$ (a^2), d'où il s'enſuit que CA étant $= a$, on a $\frac{a}{a} = 1+m \text{ cof. } u$; ſuppoſons donc u un angle quelconque, & la proportion générale de l'article 6, deviendra $u+m \text{ ſin. } u : (1+m \text{ cof. } u)^{\frac{1}{2}} \times \text{angl.}$

(a¹ & a²) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

$\text{ſin.}\left(\frac{1}{1+m\ \text{cof.}\,u}\times\sqrt{(1-mm)}\times\text{ſin.}\,u\right)::17:1$.

9. Regardons maintenant u comme une conſtante priſe à volonté, égale, plus grande ou plus petite que 90°, mais jamais $>180°$, comme le problême l'exige; & dans cette ſuppoſition, traitons m comme inconnue; prenons $u+m$ ſin. u d'une part, & de l'autre $(1+m\ \text{cof.}\,u)^{\frac{3}{2}}\times$ l'angle dont le ſinus eſt $\left(\frac{1}{1+m\ \text{cof.}\,u}\times\right.$ ſin. $\left.u\times\sqrt{(1-mm)}\right)$ pour les *abſciſſe* & *ordonnée* d'une courbe qui ait l'équation précédente, il s'agit, u étant ſuppoſée donnée, de déterminer m par la condition que l'*abſciſſe* ſoit à l'ordonnée comme 17 à 1.

10. Or il eſt viſible, 1°. que m étant $=0$ (ce qui eſt la plus petite valeur que m puiſſe avoir, puiſqu'il ne ſauroit être négatif), la premiere abſciſſe ſera $=u$, & que l'ordonnée correſpondante ſera l'angle dont le ſinus eſt ſin. u; c'eſt-à-dire, u. 2°. Que dans le cas de $m=1$ (ce qui eſt la plus grande valeur que m puiſſe avoir dans l'hypothèſe préſente, où l'on ſuppoſe que la trajectoire eſt elliptique), la derniere abſciſſe qui répond à cette valeur de $m=1$, ſera $u+$ ſin. u, & l'ordonnée correſpondante ſera $=0$. De plus, il eſt clair que l'abſciſſe $u+m$ ſin. u va toujours en croiſſant, à meſure que m croît, ſa différence $du[1+m\ \text{cof.}\,u]$ étant toujours poſitive, d'où il s'enſuit que la ſolution ſera toujours poſſible, puiſque la premiere abſciſſe u eſt égale à l'ordonnée correſpondante, c'eſt-à-dire, à

l'angle dont le ſinus eſt u, & qu'il y aura par conſéquent entre $m = 0$ (qui donne le rapport de l'abſciſſe à l'ordonnée $= 1$, & par conſéquent < 17), & $m = 1$, (qui donne le rapport de l'abſciſſe à l'ordonnée $= \frac{1}{0}$, ou ∞) une valeur de m qui réſoudra le problême (a^3).

11. Nous avons ſuppoſé ci-deſſus (art. 9, n°. 2) que dans le cas de $m = 1$, l'ordonnée répondante à l'abſciſſe $u + \text{ſin.}\, u$, & qui eſt égale à $(1 + m \cos. u)^{\frac{1}{2}} \times$ l'angle dont le ſinus eſt $\left(\frac{1}{1 + m \cos. u} \times \sqrt{(1 - m m)} \times \text{ſin.}\, u\right)$, eſt $= 0$, par la raiſon que ce dernier ſinus eſt alors $= 0$. Mais comme u peut être ſuppoſé égal ou preſqu'égal à 180°, & que par conſéquent ſin. $u =$ ſin. $180° = 0$, on pourroit douter ſi l'angle qui répond à l'autre ſinus, n'eſt pas auſſi $= 180°$, au lieu d'être zero, ce qui laiſſe quelqu'incertitude dans la ſolution précédente.

12. Pour s'en éclaircir, il faut conſidérer que par les recherches & les conſtructions précédentes, l'angle dont le ſinus eſt $\frac{1}{1 + m \cos. u} \times \text{ſin.}\, u \times \sqrt{(1 - m m)}$, n'eſt autre choſe que l'angle DCA, qui a pour coſinus $\frac{NC}{CA} = \frac{a}{a} \times (m + \cos. u) = \frac{m + \cos. u}{1 + m \cos. u}$; d'où il eſt clair qu'en prenant u tant ſoit peu plus petit que 180°, & $m = 1$, ce qui donne cos. u négatif, & < 1, la quantité $\frac{m + \cos. u}{1 + m \cos. u}$, ſera toujours poſitive, & que par

(a^1) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

conſéquent

conſéquent l'angle qui a ce coſinus, & dont le ſinus eſt $\frac{1}{1+m\cos u} \times \text{ſin. } u \times \sqrt{(1-mm)}$, ne ſera jamais $> 90°$, tant que u ne ſera pas $= 180°$; d'où il s'enſuit qu'en prenant même $u = 180°$, l'angle dont il s'agit ne ſera point égal à 180°, puiſqu'il y auroit alors *un ſaut* dans la valeur de cet angle. Donc cet angle eſt $= 0$, lorſque ſon ſinus $= 0$. Donc la ſuppoſition que nous avons faite eſt légitime. Donc il y a néceſſairement une valeur de m entre 0 & 1, qui réſout le problème.

13. Si l'angle u, qu'on ſuppoſe donné, & d'où l'on tire la valeur de m par la ſolution de l'article 10 ci-deſſus, eſt tel que coſ. u ſoit négatif, c'eſt-à-dire, ſi cet angle eſt $> 90°$, alors l'angle DCA qui a pour coſinus $\frac{m+\cos u}{1+m\cos u}$, devient auſſi $> 90°$, tant que m eſt $<$ que coſ. u pris poſitivement. C'eſt pourquoi ſi on veut exprimer l'angle DCA par ſon ſinus $\frac{1}{1+m\cos u} \times \sqrt{(1-mm)} \times \text{ſin. } u$ ſuivant les méthodes connues, il faut prendre garde ſi, dans le cas où coſ. u eſt négatif, m eſt $>$ ou $<$ coſ. u; dans le premier cas, nommant ω le ſinus de DCA, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{1+m\cos u} \times \text{ſin. } u \times \sqrt{(1-mm)}$, cet angle ſera $= \omega + \frac{\omega^3}{2.3}$, &c. dans le ſecond, cet angle ſera égal à $180° - \omega - \frac{\omega^3}{2.3}$, &c.

14. Si donc on veut réduire en calcul la proportion de l'art. 8 qui donne la valeur de m, celle de u étant ſuppoſée donnée, il faudra écrire $\frac{u+m\,\text{ſin. }u}{17(1+m\,\text{cof. }u)^{\frac{1}{2}}} = u + \frac{u^3}{2\cdot 3}$, &c. ſi cof. u eſt poſitif, ou ſi cof. u étant négatif, m eſt $>$ que cof. u pris poſitivement; & il faudra écrire $\frac{u+m\,\text{ſin. }u}{17(1+m\,\text{cof. }u)^{\frac{1}{2}}} = 180^a - u - \frac{u^3}{2\cdot 3}$, &c. ſi cof. u étant négatif, m eſt $<$ cof. u. Delà on tirera la valeur arithmétique de m par approximation (a^4).

15. Si on veut réſoudre par un ſimple tâtonnement arithmétique, le problème de l'art. 10, u étant donné à volonté, on prendra ſucceſſivement pour m toutes les valeurs poſſibles depuis 0 juſqu'à 1, ou plutôt un certain nombre de ces valeurs, l'angle DCA, que je nomme Ω, aura pour coſinus $\frac{m+\text{cof. }u}{1+m\,\text{cof. }u}$, & on aura les angles Ω correſpondans, leſquels ſeront $<$ ou $> 90^a$, ſelon que leur coſinus ſera poſitif ou négatif, on ſera enſuite une table qui contiendra les différentes valeurs de $\frac{u+m\,\text{ſin. }u}{\Omega(1+m\,\text{cof. }u)^{\frac{1}{2}}}$, on cherchera dans cette table les deux valeurs les plus proches de 17, l'une en-deſſus, l'autre en-deſſous, & la valeur cherchée de m ſera entre les

(a^4) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

deux valeurs de m correſpondantes. On la trouvera par les méthodes ordinaires d'approximation & d'interpolation.

16. Pour réſoudre encore plus exactement & plus facilement ce problême, on peut prendre une dixaine de valeurs de u, depuis 10 degrés juſqu'à 170; & une dixaine de valeurs de m depuis 0 juſqu'à 1, correſpondantes à chacune des valeurs de u, ce qui donnera 100 valeurs différentes de $\frac{u+m\sin u}{n(1+m\cos u)^{\frac{1}{2}}}$, par le moyen deſquelles on trouvera facilement celles qui donnent $\frac{u+m\sin u}{n(1+m\cos u)^{\frac{1}{2}}}=17$, & qui ſont différentes ſelon la valeur qu'on ſuppoſe à u (a^1).

17. Quand on aura connu m, en ſuppoſant u donné à volonté, on aura facilement l'angle BCA (Fig. 49), l'angle de projection HAC, ſon ſinus h, & la viteſſe de projection horiſontale abſolue G'; d'où l'on déduira la viteſſe abſolue de projection $g=\frac{G'}{h}$; & par conſéquent le corps devra être lancé par la main ou par l'inſtrument avec une viteſſe horiſontale $=G'-G$, & avec une viteſſe verticale $=\sqrt{(g^2-G'^2)}=\frac{G'\sqrt{(1-hh)}}{h}$.

18. Il eſt aiſé de voir par ce qui précede, que l'expreſſion de la viteſſe G' eſt $\frac{\sqrt{M}\sqrt{(1-m^2)}}{\sqrt{a}.\sqrt{(1+m\cos u)}}$, puiſ-

(a^1) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

que (art. 6) a$(1-mm)=\frac{aagghh}{M}=\frac{aaG'^2}{M}$, & que a$=\frac{a(1-mm)}{1+m\,\text{cof}\,u}$. A l'égard du ſinus h de l'angle HAC, on remarquera, pour le trouver plus aiſément, que la cotangente de l'angle CAh eſt $=\frac{-d(CA)}{CA\,d\Omega}$ $=-d\left(\frac{1-mm}{1-m\,\text{cof.}\,\Omega}\right)\times\frac{1+m\,\text{cof.}\,\Omega}{1-mm}\times\frac{1}{d\Omega}$, en prenant a conſtant & Ω variable, donc cette cotangente eſt $=\frac{m\,\text{ſin}\,\Omega}{1-m\,\text{cof}\,\Omega}$. Or ſin. Ω (art. 12)$=\frac{\text{ſin}\,u\,\sqrt{(1-mm)}}{1+m\,\text{cof}\,u}$; & cof. Ω (*ibid.*)$=\frac{m+\text{cof}\,u}{1+m\,\text{cof}\,u}$; donc ſubſtituant, on trouve que la cotangente dont il s'agit eſt $\frac{m\,\text{ſin}\,u}{\sqrt{(1-mm)}}$, expreſſion très-ſimple; d'où il s'enſuit que la tangente du complément, c'eſt-à-dire, la tangente de l'angle CAh que la ligne de projection forme avec la verticale, eſt $\frac{\sqrt{(1-mm)}}{m\,\text{ſin.}\,u}$ (a^6).

19. Lorſque le corps A eſt lancé ſimplement de bas en haut, ſuivant AF, nous avons vu ci-deſſus qu'il ne devoit pas retomber exactement & rigoureuſement au même point, mais que le point A eſt en α, lorſque le corps retombe en α. Pour trouver $a\alpha$, on conſidérera que le ſecteur $AC\alpha$ eſt exactement $=AB\alpha C$, & qu'ainſi $C\alpha=\frac{2AB\alpha A}{CA}$. Or quand la viteſſe de

---

(a^6) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

projection verticale ſuivant AF, eſt très-petite par rapport à la viteſſe de rotation de la terre, l'arc Aa eſt peu conſidérable, & peut être cenſé une ligne droite, & la courbe aBA peut auſſi être cenſée une parabole décrite avec la viteſſe horiſontale initiale $G = \frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$, & la viteſſe de projection verticale due à la hauteur k, c'eſt-à-dire, $\sqrt{\left(\frac{2Mk}{aa}\right)}$. On ſait de plus par la théorie des projectiles, que dans ce cas la hauteur BD de la parabole ſeroit $= k$, & la portée $Aa =$ à deux fois l'eſpace que le corps parcourroit uniformément avec la viteſſe G pendant le temps qu'il employeroit à remonter à la hauteur k, c'eſt-à-dire, égale deux fois à $\frac{G \times 2k}{\sqrt{\left(\frac{2Mk}{aa}\right)}}$. Donc en ſubſtituant pour G ſa valeur $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{A}}$, on aura $Aa = \frac{2\sqrt{2}.\sqrt{(ak)}}{17}$; donc l'eſpace ſenſiblement paraboliqué $ABaA = \frac{4k\sqrt{2}.\sqrt{(ak)}}{3.17}$; donc $aa = \frac{8k\sqrt{2}\sqrt{(ak)}}{3.17a} = \frac{8k^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3.17\sqrt{a}}$, & l'angle $acA = \frac{8k^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3.17a^{\frac{1}{2}}}$ (a7).

20. Comme les corps peſans parcourent 15 pieds par ſeconde, le corps tombant de la hauteur k, ou pouvant s'élever à la hauteur k, parcourroit unifor-

(a7) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

ment l'eſpace $2k$ pendant le temps qu'il mettroit à tomber de cette hauteur k, c'eſt-à-dire, pendant un temps $= \grave{a} \frac{\sqrt{k} \times 1^{\text{sec.}}}{\sqrt{(15^{\text{pieds}})}}$, donc ſa viteſſe ſera $= \frac{2k\sqrt{(15^{\text{pieds}})}}{1^{\text{sec.}}\sqrt{k}}$; donc ſi on ſuppoſe cette viteſſe telle qu'il parcourre uniformément l'eſpace r pendant une ſeconde, on aura $r = 2\sqrt{k}.\sqrt{(15^{\text{pieds}})}$, & $k = \frac{r^2}{4.15^{\text{pieds}}}$.

21. Donc le rayon de la terre a étant $=$ 1500 lieues, ou environ $1500 \times 2500 \times 6$ pieds, on aura, en faiſant $r = \mu$ pieds, $aa = \frac{\mu^2 \times 8\sqrt{2}\text{ pieds}}{3.17.4.15.2\sqrt{(15)}.\sqrt{(1500)} \times 50\sqrt{6}} = \frac{\mu^2 \text{ pieds}}{3.17.(15)^2.10.50\sqrt{3}}$.

22. Soit $\mu = 900$, c'eſt-à-dire, ſuppoſons que la viteſſe verticale avec laquelle le corps eſt lancé ſoit telle qu'elle lui fît parcourir uniformément 900 pieds par ſeconde, on aura $aa = \frac{(900)^2 \text{ pieds}}{3.17.(15)^2.10.50\sqrt{3}}$; donc (à cauſe de $3.17 = 51 = 50(1 + \frac{1}{50})$, & de $\sqrt{3} =$ à peu près $2(1 - \frac{1}{8})$), la valeur de aa ſera à peu près $= \frac{81000000^{\text{e}}}{2 \times 50.5\ 50.50} \times (+\frac{1}{2} - \frac{1}{10}) =$ environ 71 pieds.

23. Si μ étoit double de 900 pieds, c'eſt-à-dire, de 1800 pieds, la valeur de aa augmenteroit en raiſon de 2^2 à 1; c'eſt-à-dire, ſeroit de 568 pieds ou environ, & ainſi du reſte.

24. M. Varignon dit dans la Préface de ſes *Conjectures ſur la cauſe de la peſanteur*, que le P. Merſenne &

M. Petit, Intendant des Fortifications, ayant placé un canon bien perpendiculairement, & ayant tiré le boulet en l'air, n'avoient pu enſuite le retrouver, ce qui leur avoit fait croire que le boulet n'étoit pas retombé. Il eſt cependant évident par ce qu'on vient de dire, qu'en ſuppoſant même la viteſſe du boulet de 1800 pieds par ſeconde, & faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'air, il n'auroit dû retomber qu'a 568 pieds environ de l'endroit d'où il avoit été lancé; d'où il s'enſuit que le P. Merſenne & M. Petit n'ont pas bien cherché le boulet, ou l'ont peut-être cherché trop près d'eux, dans la fauſſe perſuaſion qu'il auroit dû retomber à peu près au même lieu d'où il étoit parti.

25. On peut réſoudre très-ſimplement, par une méthode analogue à la précédente, le problême de l'article 6, lorſque Aa eſt d'une petite étendue, & que BD, k, eſt peu conſidérable par rapport au rayon de la terre. Pour cela on conſidérera qu'afin que le corps retombe au même endroit d'où il eſt lancé, la viteſſe abſolue de projection horiſontale doit être $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}+\gamma'$, γ' étant une quantité fort petite, & que, ABa étant à peu-près une parabole, on aura $ABaCA : ACa$ a très-peu près comme $\frac{2}{3}BD+\frac{AC}{2}.\frac{AC}{2}$, & comme $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}+\gamma'$ à $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{A}}$; d'où il s'enſuit que $\frac{4k}{3}.a : \gamma'.\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$; delà on tirera $\gamma'=\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}\times\frac{4k}{3a}$; donc prenant k à vo-

lonté, pourvu qu'il ſoit très-petit par rapport à a, le rapport de la viteſſe verticale à la viteſſe de projection γ' ſera celui de $\frac{\sqrt{(2k)}}{a}$ à $\frac{4k}{3.17a\sqrt{a}}$, ou de $\sqrt{a}$ à $\frac{2\sqrt{2}.\sqrt{k}}{3.17}$, ce qui donnera l'angle de projection & la viteſſe de projection que la puiſſance doit imprimer au corps.

26. Puiſque le rapport de la viteſſe de projection γ, à la viteſſe verticale, eſt $\frac{2\sqrt{2}}{3.17} \times \sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)}$, il s'enſuit que cette quantité eſt la tangente de l'angle que la ligne de projection fait avec la verticale, k étant toujours ſuppoſé très-petit par rapport à a. Donc à cauſe de $k = \frac{r^2}{4.15 \text{ pieds}}$, de $r = \mu$ pieds, & de $a = 1500 \times 2500 \times 6$ pieds, on aura la tangente dont il s'agit, égale à $\frac{\mu^2}{3\sqrt{3.500.15.17}}$ (a^2).

27. Puiſque (art. 19) la quantité αa qui exprime la diſtance du point de projection au lieu plus occidental où le corps retombe, eſt $\frac{2.AB.aA}{CA}$, on aura rigoureuſement & généralement, en employant les noms & les calculs de l'art. 5, $a\alpha = \frac{2a(\mu + m\sin.u)\sqrt{(1-mm)}}{(1+m\cos.u)^2} - 2a\Omega$. C'eſt la formule générale néceſſaire pour trouver dans tous les cas le lieu où doit retomber un corps

(a^2) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

lancé

lancé perpendiculairement ſous l'équateur avec une viteſſe $= \frac{\sqrt{(2Mk)}}{a}$. Cette ſuppoſition donnera d'abord la tangente de l'angle $CAO = \frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} \times \frac{a}{\sqrt{(2Mk)}} = \frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{(2k)}}$; on a de plus (art. 6) $a(2-mm) = \frac{aaggkk}{M}$, c'eſt-à-dire, dans le cas préſent $a(1-mm) = \frac{a}{289}$, puiſque $ggkk = \frac{M}{289a}$. On a encore $\frac{2(1-mm)}{1-\text{cof. }\Omega} = a$, ou $a = \frac{a}{289(1-m\text{ cof. }\Omega)}$; & (art. 18) la tangente de l'angle CAO ou $\frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{2k}} = \frac{1-m\text{ cof. }\Omega}{m\text{ ſin. }\Omega}$; donc $\frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{(2k)}} = \frac{1}{(17)^2 m\text{ ſin. }\Omega}$, & $1-m$ cof. $\Omega = \frac{1}{(17)^2}$; donc $m = \frac{\sqrt{(2k)}}{17\text{ ſin }\Omega\sqrt{a}}$; & $1-\frac{\sqrt{(2k)}}{17\sqrt{a}\text{ tang. }\Omega} = \frac{1}{(17)^2}$; d'où l'on tirera la valeur de tang. Ω. Par ces équations on connoîtra m & Ω, & par conſéquent u. Donc on aura au.

28. Si le corps eſt lancé dans le plan de l'équateur avec une viteſſe perpendiculaire $=$ à $\frac{\sqrt{(2Mk)}}{a}$, & une viteſſe horiſontale $=$ à $\frac{\sqrt{(2M\cdot)}}{a}$, ſa viteſſe horiſontale abſolue ſera $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{(2M\cdot)}}{a}$, & on aura pour lors

les valeurs de m & de Ω, en mettant dans les calculs précédens, au lieu de $\frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{(2k)}}$; $\frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{2k}}+\frac{\sqrt{(2\cdot)}}{\sqrt{2k}}$; & au lieu de $\frac{M}{(17)^2 a}$, $\left(\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{(2M\cdot)}}{a}\right)^2$; ce qui donnera $a(1-mm)=\frac{aa}{M}\times\left(\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{(2M\cdot)}}{a}\right)^2$; $\frac{a(1-mm)}{1-m\cos.\Omega}=a$, & $\frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{2k}}+\frac{\sqrt{(2\cdot)}}{\sqrt{2k}}=\frac{1-m\cos.\Omega}{m\sin.\Omega}$; d'où l'on tirera, pour le cas dont il s'agit, les valeurs de m, Ω & a, on aura donc $a(1-mm)=$ $\left(\frac{\sqrt{a}}{17}+\sqrt{2\cdot}\right)^2$; $1-m\cos.\Omega=\frac{\left(\frac{\sqrt{a}}{17}+\sqrt{2\cdot}\right)^2}{a}$, $m=$ $\frac{\sqrt{(2k)}}{a\sin.\Omega}\times\left(\frac{\sqrt{a}}{17}+\sqrt{2\cdot}\right)$, & $a-\frac{\sqrt{(2k)}\times\left(\frac{\sqrt{a}}{17}+\sqrt{2\cdot}\right)}{\text{tang.}\,\Omega}$ $=\left(\frac{\sqrt{a}}{17}+\sqrt{2\cdot}\right)^2$. Maintenant, dans le temps que le corps parcourt le ſecteur elliptique $AB\alpha C$, ou $\frac{2.aa}{2}(u+m\cos.u)\times\sqrt{(1-mm)}=$ $\frac{aa(u+m\cos.u)\sqrt{(1-mm)}}{(1+m\cos.u)^2}$, en vertu de la viteſſe horiſontale $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{(2M\cdot)}}{a}$, le point A de la terre parcourra en vertu de la viteſſe $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$ un arc que j'appelle $2\Omega'=\frac{2\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}\times\frac{u+m\cos.u}{(1+m\cos.u)^2}\times\sqrt{(1-mm)}$

divisé par $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{(2M_1)}}{a}$. Donc $a\alpha$ sera la différence de cet arc & de l'arc 2Ω.

29. Si les quantités k & 1 sont assez petites par rapport au rayon de la terre, le double de l'espace que le corps parcourroit horisontalement avec la vitesse $\frac{\sqrt{(Ma)}}{17a} + \frac{\sqrt{(2M_1)}}{a}$, pendant le temps qu'il employeroit à remonter à la hauteur k, sera égal (art. 19) à $\frac{2ka}{\sqrt{(2Mk)}} \times \left(\frac{2\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{2\sqrt{(2M_1)}}{a}\right) = 2\sqrt{(2ak)}\left(\frac{1}{17} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\right)$, cette quantité que j'appelle λ, étant multiphée (art. 25) par $\frac{a}{2} + \frac{2}{3}k$, & divisée par $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{(2M_1)}}{a}$ doit être $= \frac{(\lambda + a\alpha)}{\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}} \times \frac{a}{2}$; d'où l'on tire

$$2\left(\frac{a}{1} + \frac{2}{3}k\right)\frac{\sqrt{(2k)} \times a}{\sqrt{M}} = \frac{(\lambda + a\alpha)\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}}; \text{ \& } a\alpha = \frac{2a\left(\frac{a}{1} + \frac{2}{3}k\right)\sqrt{(2k)}}{\frac{17a^{\frac{1}{2}}}{2}} - \lambda = \frac{4\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{3}k\right)\sqrt{2k}}{17\sqrt{a}} - \lambda$$

$$\frac{2\sqrt{(2ak)}}{17} - 4\sqrt{(k1)} = \frac{8k\sqrt{2k}}{3.17\sqrt{a}} - 4\sqrt{ka}.$$ Donc si $a\alpha$ est supposé $= 0$, il faut que $\frac{12k\sqrt{(12)}}{3.17\sqrt{a}} = \sqrt{(k1)}$, d'où

l'on tire $v = \frac{8k^2}{3^2 \cdot 17^2 \cdot a}$, & $\sqrt{(2M_1)} = \sqrt{M} \times \frac{4k}{3 \cdot 17\sqrt{a}}$ = a la valeur de γ' trouvée ci-deſſus, art. 25, pour le cas ou le corps doit retomber au même point d'où il eſt parti (a²).

30. On voit aiſément par tout ce qui précede, que pour qu'un corps lancé dans le plan de l'équateur retombe au même point d'où il eſt parti, il faut néceſſairement qu'il ait reçu une impulſion horiſontale; cependant il y auroit un cas ou le corps pourroit retomber a la même place, ſans aucune impreſſion horiſontale, ce ſeroit celui ou le ſecteur elliptique $2BAC$ ſeroit $= (360^\circ + Aa) \times \frac{aa}{2}$, ce qui donneroit

$$\frac{u + m \text{ ſin. } u}{(1 + m \text{ cof. } u)^2} \times \sqrt{(1 - mm)} = \frac{(360^\circ + 2\Omega)}{2} = 180^\circ + \Omega.$$

Or dans ce cas gh étant $= \frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$, on a $a(1 - mm) = \frac{a}{(17)^2}$, ou $\frac{1 - mm}{1 + m \text{ cof. } u} = \frac{1}{(17)^2}$; ou, ce qui eſt encore plus ſimple, $1 - m \text{ cof. } \Omega = \frac{1}{(17)^2}$, & $\text{cof. } \Omega = \frac{1}{m} - \frac{1}{17^2 m}$, donc $1 + m \text{ cof. } u = (17)^2 (1 - mm)$, & ſin. $u = \frac{\text{ſin. } \Omega}{\sqrt{(1 - mm)}} \times (17)^2 (1 - mm) = (17)^2$ ſin $\Omega \sqrt{(1 - mm)}$, d'ou il eſt clair qu'on aura

$$\frac{u + m(17)^2 \text{ ſin. } \Omega \sqrt{(1 - mm)}}{(17)^4 (1 - mm)^2} \times \sqrt{(1 - mm)} = 180^\circ + \Omega.$$

(a²) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

Or puiſque cof. $\Omega = \frac{1}{m} - \frac{1}{17^2 m}$, & que $m = \frac{1 - \frac{1}{17^2}}{\text{cof. } \Omega}$, il eſt viſible que m ne pouvant être > 1, cof. Ω ne ſauroit être $< 1 - \frac{1}{17^2}$; donc ſin. Ω ne peut guère être plus grand que $\frac{\sqrt{2}}{17}$, ou $\sqrt{\left(\frac{2}{289}\right)} = \frac{1}{12 + \frac{1}{24}}$; & les deux valeurs extrêmes de m ſont $1 - \frac{1}{17^2}$ qui donne ſin. $\Omega = 0$, & 1, qui donne ſin. $\Omega =$ environ $\frac{\sqrt{2}}{17}$; d'où l'on voit que ſin. Ω, & par conſéquent Ω eſt toujours une aſſez petite quantité.

31. Soit ſin. $\Omega = \alpha$, ce qui donne auſſi à peu-près $\Omega = \alpha$, on aura $m = \frac{1 - \frac{1}{17^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2)}} =$ à très-peu-près $1 - \frac{1}{17^2} + \frac{\alpha^2}{2}$; $\sqrt{(1 - mm)} = \sqrt{\left(\frac{2}{(17)^2} - \alpha^2\right)}$; & l'équation pour trouver α ſera à très-peu près, $\frac{2\alpha}{(17)^2\left(\frac{2}{(17)^2} - \alpha^2\right)} = 180^\circ + \alpha$, ou à cauſe que α eſt aſſez petit, on peut ſupprimer α du ſecond membre. Or ſi $\alpha = 0$, le premier membre eſt $= 0$, & ſi $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{17}$ ce premier membre eſt infini ; donc la ſolution

eſt toujours poſſible, en prenant une valeur de α moyenne entre ces deux valeurs extrêmes.

32. On voit de plus qu'au lieu de 180° ou de π, (π exprimant le rapport de la demi-circonférence au rayon) on pourroit écrire $i\pi$, i étant un nombre entier poſitif, & que la ſolution ſeroit encore toujours poſſible, en ce cas on auroit i 360° au lieu de 360°; donc le problême aura une infinité de ſolutions poſſibles, en faiſant ſucceſſivement $i =$ à tous les nombres entiers depuis 1 juſqu'à l'infini, & i ſera le nombre des révolutions que doit faire la terre avant que le corps retombe à la même place, étant lancé perpendiculairement & ſans aucune impulſion horiſontale. Ayant la valeur à peu-près exacte de α ou de Ω par l'équation précédente, il ſera aiſé d'en trouver ſi l'on veut une plus rigoureuſe par le moyen de l'équation

$$\frac{u+m\,(17)^{\frac{3}{2}}\sin.\,u\sqrt{(1-mm)}}{(17)^{\frac{1}{2}}(1-mm)^{\frac{1}{4}}} = 180^{\circ}+\Omega\ (a^{18}).$$

33. Nous avons vu ci-deſſus (art. 3), que ſi k' étoit $=$ ou $> a$, la projection étant oblique, le corps ne retomberoit jamais ſur la ſurface de la terre. Or de-là il réſulte un paradoxe ſingulier, c'eſt que le corps A peut être lancé ſeulement dans la direction verticale AF avec une viteſſe telle qu'il ne retombe jamais ſur la ſurface de la terre. Car ſoit $\frac{2Mk}{aa}$ le quarré de cette viteſſe verticale, comme le quarré de la viteſſe hori-

(a18) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

ſontale, que le corps reçoit de la rotation de la terre, eſt $\frac{M}{(17)^3 a}$, il eſt clair que le quarré de la viteſſe abſolue gg ſera $= M\left(\frac{1}{(17)^3 a} + \frac{2k}{aa}\right)$; donc ſi cette quantité eſt $>$ ou $= \frac{2M}{a}$, le corps ne retombera jamais, ce qui donne $k >$ ou $= a - \frac{a}{2(17)^3}$. En général, il eſt aiſé de voir que, ſi le quarré de la viteſſe verticale eſt $=$ ou $> \frac{2M}{a}$, c'eſt-à-dire, ſi $k =$ ou $> a$, quelque lente que ſoit d'ailleurs ſuppoſée la rotation de la terre, le quarré de gg ſera plus grand que $\frac{2M}{a}$, & par conſéquent le corps ne retombera jamais.

34. Il paroît d'abord réſulter delà une abſurdité, c'eſt que ſi la terre étoit en repos, & que k fût $=$ ou $> a$, le corps ne devroit jamais retomber; quoique le contraire ſoit évident. Mais il faut remarquer que la propoſition avancée, art. 3, que le corps ne doit jamais retomber, ſi $k =$ ou $> a$, ſuppoſe que la viteſſe abſolue de projection ait quelqu'obliquité, ſi petite qu'on voudra. En effet, ſi la viteſſe de projection, par exemple, étoit nulle, en ſorte que le corps tendît directement au centre des forces, on trouveroit par la formule $gg = \frac{2M}{a} - \frac{M}{a}$, que a ſeroit $= 2a$, c'eſt-à-

dire, que le corps devroit décrire une ellipſe infiniment allongée dont le point de tendance ſeroit le foyer, ou, ce qui revient au même, que le corps, après être arrivé en ligne droite au point de tendance, reviendroit enſuite ſur ſes pas; ce qui eſt abſurde, puiſqu'il eſt évident qu'il doit alors continuer ſon chemin au-delà de ce même point, en s'en éloignant juſqu'à une diſtance égale à celle d'où il eſt parti, & qu'il reviendra enſuite ſur ſes pas, en faiſant les mêmes vibrations, d'où il eſt clair que la formule $gg = \frac{2M}{a} - \frac{M}{z}$ ne donne le vrai chemin du corps, que dans le cas où la direction de viteſſe a quelqu'obliquité, ſi petite qu'on voudra. Il eſt vrai que M. Euler, dans ſa Méchanique (art. 655), croit qu'un corps qu'on laiſſeroit tomber directement au point C, lorſque la force centrale eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, doit revenir ſur ſes pas quand il eſt arrivé en C. Mais il eſt viſible que ce grand Géometre s'eſt trompé ſur ce point (a^{11}).

35. Si le corps, au lieu d'être lancé dans le plan de l'équateur, étoit lancé dans le plan d'un autre grand cercle, mais toujours en un point de l'équateur, il eſt viſible qu'à cauſe de l'impulſion horiſontale qu'il auroit néceſſairement alors, & qui ſe combineroit avec le mouvement de la terre, il ſe mouvroit dans le plan d'un troiſiéme grand cercle, qui couperoit l'équateur à 180° du point de départ, d'où il s'enſuit que le corps

(a^{11}) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

ne

ne retombera au point d'où il eſt parti, que dans le cas où il arriveroit à ce point de ſection après une demi-révolution de la terre. Dans ce cas, il eſt aiſé de voir, par ce qui précéde, qu'on auroit $\Omega = 90^{\circ}$, ou $2\Omega = 180^{\circ}$, & l'art. 2 de la note (a^6) ſur l'art. 18, fait voir que la ſolution eſt alors poſſible.

36. On a dans ce cas $gghh$, ou $G'G'$, quatté de la viteſſe horiſontale abſolue $= \frac{Ma(1-mm)}{2a} =$ $\frac{M(1-mm)}{a(1+m\,\text{cof.}\,\omega)} = \frac{M(1-mm)(1-m\,\text{cof.}\,\Omega)}{a} =$ $\frac{M(1-mm)}{a}$, puiſque cof. $\Omega = \text{cof.}\,90^{\circ} = 0$; & la tangente de l'angle CAO ſera (note citée, art. 1) $\frac{1}{m}$; d'où connoiſſant la viteſſe horiſontale abſolue, on aura la viteſſe de projection verticale $= \frac{M}{a}(1-mm) \times m^2$. Connoiſſant la viteſſe du point A de l'équateur ſuivant AB (Fig. 51), égale à $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$, & la viteſſe horiſontale abſolue ſuivant $AC = \frac{\sqrt{M}.\sqrt{(1-mm)}}{\sqrt{a}}$, il ſera facile, en ſuppoſant l'angle BAC donné, & prenant $\frac{AC}{AB} = 17\sqrt{(1-mm)}$, de trouver la ligne AD parallèle à CB, ſuivant laquelle le corps doit être lancé horiſontalement, & la viteſſe de projection horiſontale ſuivant AD, & il eſt aiſé de voir que ſi AD,

étoit un méridien, l'angle DAB étant alors un angle droit, on auroit la viteſſe ſuivant $AD =$

$$\frac{\sqrt{\left[M\left(1 - mm - \frac{1}{17^2}\right)\right.}}{\sqrt{a}} \quad (a^{11}).$$

37. Nous avons ſuppoſé juſqu'à préſent que le corps étoit lancé dans l'équateur. Suppoſons préſentement qu'il ſoit lancé ſuivant la tangente d'un parallèle, il eſt évident qu'il tendra à ſe mouvoir dans le plan du grand cercle qui touche le parallèle au point de projection ou de départ; & que l'ellipſe qu'il décrira ſera dans le plan de ce grand cercle. Donc le point où il retombera ſera dans le plan de ce grand cercle, & par conſéquent ne ſera ni à la même longitude, ni à la même latitude que le point d'où il eſt parti, à moins que la viteſſe de projection ne ſoit telle que le corps faſſe ſa révolution dans ſon ellipſe préciſément dans un jour, auquel cas il eſt néceſſaire que la projection verticale ſoit nulle, & que le corps ne ſoit lancé qu'horiſontalement.

38. Si le corps ſe meut dans une direction oblique au parallèle, & dans le plan d'un grand cercle qui faſſe avec le plan du parallèle un angle $= \varphi$, ſoit BAG (Fig. 52) cet angle, le point D étant ſuppoſé à l'équateur, & BF le rayon du parallèle, & ſoient 2Ω, 2ω, les angles ou le nombre de degrés correſpondans aux arcs du grand cercle & du parallèle qui ont la même corde

(a^{11}) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

commune, paſſant par A, & perpendiculaire au plan du méridien DBE, on aura évidemment $\frac{AF}{CF} = \frac{\text{cof. } \rho}{\text{fin. } \rho}$; fin. $u = \frac{\text{fin. } \Omega}{BF}$, BF étant le coſinus de la latitude.

39. Maintenant, le temps employé par un point de la terre à parcourir l'arc 2ω du parallèle, eſt évidemment $\frac{2\omega \times BF}{G \times AF} = \frac{2\omega}{G} = \frac{2\omega 17\sqrt{a}}{\sqrt{M}}$, & le temps employé par le corps grave à décrire l'arc elliptique qui répond à l'angle 2Ω du grand cercle, eſt (art. 5), $\frac{2a^2\sqrt{(1-mm)}}{aaG'}(u + m \text{ fin. } u) = 2\sqrt{(1-mm)} \times \frac{1}{(1+m \text{ cof. } u)^2} \times (u + m \text{ fin. } u) \times \frac{\sqrt{(1+m \text{ cof. } u)}\sqrt{a}}{\sqrt{(1-mm)}\sqrt{M}}$, en mettant pour G' ſa valeur $\frac{\sqrt{M}\sqrt{(1-mm)}}{\sqrt{a}\sqrt{(1+m \text{ cof. } u)}}$. Donc pour que les deux temps ſoient égaux, c'eſt-à-dire, pour que le corps retombe au même point du parallèle d'où il eſt parti, il faut que $u + m$ fin. $u = 17\omega(1+m \text{ cof. } u)^{\frac{1}{2}}$, ou $u + m \text{ fin. } u = 17 \times (1+m \text{ cof. } u)^{\frac{1}{2}}$ × l'angle dont le ſinus eſt $\frac{\text{fin. } \Omega}{BF}$, c'eſt-à-dire, dont le ſinus eſt $\frac{\text{fin. } u\sqrt{(1-mm)}}{(1+m \text{ cof. } u)n}$, en nommant n la donnée BF.

40 On ſe ſervira donc de la même conſtruction que dans les art. 9 & 10 ci-deſſus, à l'exception qu'on pren-

dra dans cette conſtruction $\frac{\text{ſin. } u}{n}$ au lieu de ſin. u, les conſéquences ſeront d'ailleurs les mêmes, & le problême ſera toujours poſſible; donc, 1°. connoiſſant par ce moyen l'angle u, & par conſéquent l'angle Ω, on aura l'angle ρ par l'équation ſin. $\Omega = \sqrt{\left(n^2 - \frac{\text{cof. } \rho^2 (1 - n^2)}{\text{ſin. } \rho^2}\right)}$. 2°. Connoiſſant l'angle ρ du plan du grand cercle avec celui du parallèle, & la viteſſe horiſontale abſolue initiale G', qu'on vient d'aſſigner en a, u & m, on aura facilement l'angle de projection, & par conſéquent, comme dans l'art. 17 ci-deſſus, on en déduira la viteſſe de projection qui doit être imprimée au corps, & la direction que doit avoir cette projection, pour que le corps lancé retombe au même point du parallèle d'où il eſt parti.

41. Ayant ainſi trouvé les deux arcs de cercle 2Ω & 2ω, il ne ſera pas difficile de voir que l'angle formé par ces deux arcs, a pour coſinus $\frac{\text{tang } \Omega}{BF \text{ tang } \omega}$ (a^{13}); d'où l'on déduira aiſément, par une méthode analogue à celle des art. 35 & 36, la viteſſe de projection, la valeur de cette viteſſe, & le plan ſuivant lequel elle doit être dirigée.

42. Lorſque le corps eſt lancé perpendiculairement en un point quelconque de la terre, autre qu'un point de l'équateur, avec une viteſſe telle que k ſoit beaucoup plus petit que a, ſi on nomme ρ' le rayon du

(a^{13}) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

parallèle, ou plutôt le cosinus de la latitude, la viteſſe horiſontale du corps ſera pour lors $\frac{\rho\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$, & la différence aa trouvée art. 19, ſera $\frac{8\rho'.k^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}}{3.17\sqrt{a}}$, c'eſt-à-dire, encore plus petite que dans l'équateur, & plus petite en raiſon du cosinus de la latitude.

43. Si l'on veut que le corps retombe (au moins à très-peu-près) au même point du parallèle d'où il eſt parti, k étant toujours beaucoup plus petit que a, il faut d'abord (art. précéd. & art. 25) que ſa viteſſe de projection horiſontale (eſtimée dans le ſens du parallèle) γ ſoit à la viteſſe verticale en raiſon de $\frac{2\sqrt{2}}{3.17} \times \rho' \times \sqrt{\frac{k}{a}}$ à l'unité. Il faut de plus que le plan de projection (qui eſt toujours vertical) ſoit tellement placé que la direction horiſontale abſolue du corps faſſe un petit angle avec la tangente du parallèle.

44. Pour trouver cet angle, on conſidérera qu'on connoît à peu-près, par ce qui précéde, l'étendue 2Ω de l'arc de grand cercle que le corps doit décrire horiſontalement pour retomber ſenſiblement au même point. Or cet arc très petit 2Ω devant avoir la même corde que l'arc de parallèle correſpondant, & lui étant ſenſiblement égal, il eſt aiſé de trouver l'angle qu'il fait avec la tangente du parallèle. Cet angle (Fig. 52) en ſuppoſant BA très-petit, ſera évidemment égal à

très-peu-près à BG divisé par Ω. Or $BG =$ à très-peu-près $\frac{BA \times CF}{CG} = BA \times \sqrt{\left(1 - \frac{f'^2}{a^2}\right)}$; & $BA =$ à très-peu-près $\frac{\Omega^2}{2BF} = \frac{\Omega^2}{2f'}$. Donc l'angle dont il s'agit est à très-peu-près égal à $\frac{\Omega \times \sqrt{(a^2 - f'^2)}}{2f'a} = \frac{\Omega}{2a} \times$ cotangente de la latitude.

45. Maintenant soit ω' ce petit angle, la viteſſe du point A dans la direction du parallèle (viteſſe à laquelle le corps participe ſans impulſion primitive) étant $\frac{f'\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$, & la viteſſe horiſontale abſolue du corps, dans la direction du grand cercle, devant être à très-peu-près $\frac{f'\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \gamma$, & γ pouvant être trouvée aiſément par les méthodes ci-deſſus, il eſt viſible que le corps (pour avoir ſa direction primitive abſolue dans le plan de ce grand cercle) devra recevoir de la main ou de l'inſtrument qui le lance; 1°. une viteſſe horiſontale dans le ſens du méridien, ou à très-peu-près, laquelle ſera $= \frac{\omega' f'\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$; 2°. une viteſſe horiſontale γ dans le ſens du grand cercle, c'eſt-à-dire, dans une direction qui faſſe un angle $= \omega'$ avec la tangente du parallèle; 3°. enfin, une viteſſe verticale $= \frac{\sqrt{(2Mk)}}{a}$, laquelle viteſſe verticale eſt ſuppoſée donnée & à volonté, & ſert à déterminer la viteſſe γ.

Toutes ces déterminations ne ſont pas rigoureuſement exactes, mais elles ſuffiſent pour une ſolution très approchée. La ſolution rigoureuſe ſe trouvera par l'art. 41 précédent.

46. Il ne nous reſte plus qu'à examiner en peu de mots, ce qui doit arriver à un corps lancé ſous le pole, s'il eſt lancé dans la direction du rayon ou axe de la terre, il retombera toujours, quelle que ſoit la viteſſe, mais il ne retombera jamais, s'il eſt lancé tant ſoit peu obliquement avec une viteſſe g, telle que g^2 ſoit $> \frac{2M}{a}$. C'eſt une ſuite des art. 32, 33 & 34. Enfin, ſi g^2 eſt $< \frac{2M}{a}$ & la direction oblique, le corps retombera, mais non pas au pole, il retombera à quelqu'endroit du méridien dans le plan duquel il aura été lancé, & il ſera aiſé par les recherches précédentes, de trouver ce point, c'eſt-à-dire, l'angle Ω, puiſque g, h, & a ſont donnés, c'eſt-à-dire, la diſtance initiale au foyer, la viteſſe initiale & ſa direction. On aura en effet $a(1-mm) = \frac{aagghh}{M}$, $c = \frac{a(1-mm)}{1+m\cos\Omega}$, & $\frac{h}{\sqrt{(1-hh)}} = \frac{1-m\cos\Omega}{m\sin\Omega}$, d'où l'on tirera a, m & Ω.

NOTES
SUR LES
DÉMONSTRATIONS PRÉCÉDENTES.

Note (a^1), *article 7.*

LE rapport de la force centrifuge à l'attraction ſous l'équateur, n'eſt pas rigoureuſement $\frac{1}{289}$; mais cette fraction étant un nombre quarré, on s'y eſt arrêté pour la commodité du calcul. On pourra mettre dans les calculs ſuivans, ρ à la place de 289, & $\sqrt{\rho}$ à la place de 17.

Note (a^2), *article 8.*

On peut remarquer en paſſant que ſi on mène CP perpendiculaire à MG prolongée, on aura auſſi $MP = a(1 + m \text{ cof. } u)$, d'où il s'enſuit cette propriété de l'ellipſe, que MP eſt toujours $= CA$, ce qui donne un moyen très-facile de conſtruire l'ellipſe par pluſieurs points, en décrivant du foyer C comme centre, & du rayon MP l'arc DA, qui coupe l'ordonnée MN en A.

Note (a^3), *article 10.*

1. Pour rendre cette ſolution générale encore plus nette

nette & plus facile, nous en donnerons un exemple dans un cas très-ſimple.

Soit $u = 90°$, on aura $a = a$, & il faudra qu'on ait cette proportion, $90° + m$ angl ſin. $\sqrt{(1 - mm)}$ :: 17. 1. Pour ſatisfaire à cette proportion, & trouver la valeur de m qui en réſulte, on décrira d'un rayon quelconque QK (Fig. 53) le quart-de-cercle KPS, & la trochoide KNR dont les ordonnées VN ſoient égales aux arcs KP, ſuppoſant enſuite $QF = QR$, & le coſinus QV de l'arc $KP = m$, (le rayon QK étant = 1), on aura $FV = 90° + m$, $VN =$ angl. ſin. $\sqrt{(1 - mm)}$. Donc ſi on prend $QZ = \frac{FQ}{17} = \frac{90°}{17}$, & qu'on tire FZ, cette ligne FZ ira couper la trochoide en un point N, qui donnera la valeur de $QV = m$. La valeur de m étant connue, on aura celle de G', ou $gh = \frac{\sqrt{M}\sqrt{a}.\sqrt{(1-mm)}}{a} = \frac{\sqrt{M}\sqrt{(1-mm)}}{\sqrt{a}}$, dans le cas préſent; donc pour que le corps retombe au même point d'où il eſt parti, la viteſſe horiſontale de projection imprimée par la main ou par l'inſtrument, c'eſt-à-dire, $G' - G$, doit être $= \frac{\sqrt{M}\sqrt{(1-mm)}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$ dans le cas préſent.

2. Il eſt de plus évident, que dans ce même cas, où $CA = a = a$, la tangente en A ſera parallèle à GB, puiſque le point A eſt alors le point du milieu

de l'ellipſe BAO, d'où il s'enſuit que $h = \sqrt{(1-mm)}$, & que la viteſſe abſolue de projection g ou $\frac{G'}{h}$ (art. 8) $= \frac{G'}{\sqrt{(1-mm)}}$; donc la viteſſe γ de projection verticale ſera telle que $\gamma\gamma = \frac{G'^2}{1-mm} - G'^2 = \frac{G'^2 m^2}{1-m^2} = \frac{Mm^2}{a}$, c'eſt-à-dire, que la viteſſe γ doit être dûe à la hauteur $\frac{am^2}{2}$.

3. Donc en ſuppoſant $u = 90^\circ$, il faut pour que le corps retombe au même point d'où il eſt parti, qu'il ſoit lancé obliquement, de maniere que l'angle de la ligne de projection avec la verticale, ait pour ſinus $\sqrt{(1-mm)}$, & que la viteſſe verticale ſoit dûe à la hauteur $\frac{am^2}{2}$, m étant donné par la conſtruction expoſée ci-deſſus.

4. On peut aiſément avoir m ou $\sqrt{(1-mm)}$ par approximation, en conſidérant que puiſque $KP = \frac{90^\circ}{17} + \frac{QV}{17}$, on aura d'abord à très peu-près $KP = \frac{90^\circ + QK}{17}$; puis nommant α cette premiere valeur de KP, on aura plus exactement $KP = \alpha - \frac{KV}{17} = \alpha - \frac{\alpha^2}{2.17}$, & ainſi de ſuite, ſelon les méthodes con-

Digitized by Google

nues, en général $V Q$ étant $= 1 - \frac{KP^2}{2} + \frac{KP^4}{2.3.4} -$ $\frac{KP^6}{2.3.4.5.6}$, &c. on aura, en nommant KP, z, & faiſant le ſinus total égal à l'unité, & $2\pi =$ au rapport de la circonférence au rayon, l'équation $1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5}$, &c. par le moyen de laquelle on peut trouver l'arc z auſſi exactement qu'on voudra.

5. Quant à l'arc AD, décrit par le point A (Fig. 49 & 50) de la terre, pendant la moitié de la chûte, il aura pour ſinus $V(1 - mm)$, ou le demi petit axe AN.

Note (a^4), *article* 14.

1. Il ne s'agit plus que de ſavoir laquelle des deux équations de l'article 14 il faut prendre, lorſque u eſt donné, car quoique u ſoit donné, on ne connoît pas encore m, ni par conſéquent ſi $m +$ cof. u eſt poſitif ou négatif. Or d'abord il eſt évident, comme nous venons de le dire, que ſi u n'eſt pas plus grand que 90°, il faut prendre la premiere équation, puiſque le coſinus $\frac{m + \text{cof } u}{1 + m \text{ cof } u}$, répondant au ſinus m ſera pour lors toujours poſitif. En ſecond lieu quand l'angle DCA, ou l'angle dont le ſinus eſt m ſera $= 90°$, on

aura cos. $u = -m$, & $\frac{u + m \sin. u}{(1-mm)^{\frac{3}{2}} \times 90^{\circ}} = 17$. En troiſiéme lieu, puiſque $m +$ cos. u eſt poſitif tant que cos. u, quoique négatif, n'eſt pas aſſez grand pour ſurpaſſer m, il eſt clair que quand $m +$ cos. u devient $= 0$, c'eſt-à-dire, quand l'angle $DCA = 90^{\circ}$, cette quantité $m +$ cos. u a toujours été poſitive auparavant, & par conſéquent auſſi le cosinus $\frac{m + \cos. u}{1 + m \cos. u}$ de l'angle DCA. Or ce cosinus, après avoir été poſitif, & avoir paſſé par zero, doit enſuite devenir négatif; d'où l'on peut conclure qu'on doit employer la premiere équation, tant que la valeur ſuppoſée de u ne ſera pas plus grande que celle qui ſatisfait à l'équation $\frac{u + m \sin. u}{(1-mm)^{\frac{3}{2}} \times 90^{\circ}} = 17$, & qu'enſuite il faudra prendre la ſeconde équation.

Note (a^1), *article* 16.

On doit remarquer que dans la trajectoire elliptique l'angle CAH (Fig. 49) eſt obtus, ou du moins ne peut être plus petit qu'un angle droit, & qu'il n'eſt même égal à un angle droit, qu'aux points B & O (Fig. 50), ce qui ſe prouve par la valeur $a(1 + m \cos. u)$ du rayon vecteur, dont la différence n'eſt $= 0$, que quand $\sin. u = 0$. Or il eſt toujours néceſſaire que l'angle CAH ſoit obtus, ou du moins ne ſoit pas $< 90^{\circ}$, afin que le projectile puiſſe ſe mouvoir, ou

en s'élevant au-deſſus de la ſurface de la terre, ou tout au moins en raſant cette ſurface.

Si la viteſſe de projection horiſontale eſt en ſens contraire de la viteſſe de la terre, & qu'elle lui ſoit égale, alors $G' - G = 0$, & le corps décrit une ligne droite. Si $G' - G$ eſt négatif, alors le point a (Fig. 49) tombera de l'autre côté de A; ce qu'il eſt inutile d'expliquer plus au long.

Note (a^c), article 18.

1. Puiſque $\frac{\text{ſin. } u\sqrt{(1-mm)}}{1+m\text{ cof. } u} = \text{ſin. } \Omega$, & que $\frac{m+\text{cof. } u}{1+m\text{ cof. } u} = \text{cof. } \Omega$, il s'enſuit que $\text{cof. } u = \frac{m-\text{cof. } \Omega}{m\text{ cof. } \Omega - 1}$ ou $\frac{\text{cof. } \Omega - m}{1-m\text{ cof. } \Omega}$; d'où $1+m\text{ cof. } u = \frac{1-mm}{1-m\text{ cof. } \Omega}$, & $\text{ſin. } u = \frac{\text{ſin. } \Omega}{\sqrt{(1-mm)}} \times (1+m\text{ cof. } u) = \frac{\text{ſin. } \Omega\sqrt{(1-mm)}}{1-m\text{ cof. } \Omega}$. C'eſt pourquoi, au lieu de l'équation $\frac{u+m\text{ ſin. } u}{\Omega(1+m\text{ cof. } u)^{\frac{3}{2}}} = 17$, de l'article 16, on peut écrire $\frac{u\times(1-m\text{ cof. } \Omega)^{\frac{1}{2}}}{\Omega(1-mm)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m\text{ ſin. } \Omega(1-m\text{ cof. } \Omega)^{\frac{1}{2}}}{\Omega(1-mm)} = 17$, en prenant Ω pour l'inconnue, & u pour l'angle dont le ſinus eſt $\frac{\text{ſin. } \Omega\sqrt{(1-mm)}}{1-m\text{ cof. } \Omega}$. On auroit auſſi dans cette hypo-

thèſe $G' = \frac{VM}{V^4} \times V(1 - m \text{ cof. } \Omega)$, & la tangente de l'angle $CAh = \frac{1 - m \text{ cof. } \Omega}{m \text{ ſin. } \Omega}$.

2. Si on ſuppoſe $\Omega = 90°$, on aura ſin. $u = V(1 - mm)$ & $\frac{u}{90° (1 - mm)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m}{90° (1 - mm)} = 17.$

Il y a donc, lorſque $\Omega = 90°$, une valeur de m qui peut réſoudre le problême, puiſqu'en faiſant $m = 0$, le premier membre eſt < 17, & qu'il eſt infiniment grand ſi $m = 1$. Cette remarque nous ſera utile dans la ſuite de ces recherches. Voyez art. 34.

3. Il peut y avoir de l'avantage à prendre l'angle Ω pour donné au lieu de l'angle u, parce que cet angle Ω, ou plutôt ſon double 2Ω, exprime le temps que le corps lancé met à retomber ſur la terre au même point où il eſt parti. Dans ce cas, m ſera toujours l'inconnue qu'il faudra déterminer par quelqu'une des méthodes indiquées ci-deſſus.

4. On peut remarquer en paſſant que l'expreſſion $\frac{\text{ſin. } \Omega \sqrt{(1 - mm)}}{1 - m \text{ cof. } \Omega}$ du ſinus de l'angle u n'eſt jamais > 1, (pris poſitivement ou négativement) comme en effet elle ne doit jamais l'être, car ſi elle l'étoit, on auroit (ſin. $\Omega)^2 (1 - mm) > 1 - 2m$ cof. $\Omega + m^2$ cof. Ω^2, ou $0 > m + 2 - 2m$ cof. $\Omega +$ cof. Ω^2, c'eſt-à-dire, $0 > (m - \text{cof } \Omega)^2$, ce qui ne ſe peut, $(m - \text{cof } \Omega)^2$ étant un quarré, & par conſéquent toujours poſitif. On verra

de même que l'expreſſion $\frac{\sin u\sqrt{(1-mm)}}{1+m\cos u}$ du ſinus de l'angle Ω n'eſt jamais plus grande que 1, pris poſitivement ou négativement.

Note (a^7), *article 19.*

1. On peut remarquer que AD ou $\frac{Aa}{2}$ étant $= \frac{V(2ak)}{17}$, on aura $\frac{AD^2}{2a}$, ou la fleche de l'arc $AD = \frac{k}{17}$. Ainſi cette fleche eſt aſſez petite par rapport à BD ou k, cependant, quand on voudroit regarder BD ou k comme comparable à cette fleche, & ADa comme un petit arc de cercle, l'eſpace $ABDa$ formé par la parabole ABa, & l'arc ADa n'en ſeroit pas moins cenſé égal à $ADa \times \frac{2BD}{3}$, attendu que le ſegment circulaire ADa eſt lui-même ſenſiblement égal à $ADa \times \frac{2}{3}$ de la fleche Dd. Il faut obſerver encore que la hauteur BD à laquelle le corps s'éleve en vertu de la viteſſe de projection verticale eſt un peu plus grande que ſi la rotation de la terre étoit nulle, en ſorte que la viteſſe de projection verticale dûe à la hauteur k, n'eſt pas exactement $V\left(\frac{2Mk}{aa}\right)$, mais $V(2k) \times V\left(\frac{M}{aa} - \frac{M}{289aa}\right)$, l'effet de la peſanteur $\frac{M}{aa}$ étant

diminué par la force centrifuge $\frac{M}{288aa}$; ce qui donnera une valeur de aa un peu différente de celle que nous avons trouvée, mais la différence ſera très-petite & comme inſenſible. En général, pour avoir la valeur de aa avec toute l'exactitude qu'on peut deſirer, on ſubſtituera pour G, la quantité $\frac{\sqrt{M}}{a\sqrt{\rho}}$, ρ étant le rapport de la force centrifuge ſous l'équateur à la peſanteur ou attraction primitive $\frac{M}{aa}$, & au lieu de $\sqrt{\left(\frac{2Mk}{aa}\right)}$, on écrira $\frac{2\sqrt{(Mk)}}{a} \times \sqrt{\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}$, ρ étant à très-peu-près égal à $288\frac{1}{2}$; après quoi on achevera facilement le reſte du calcul.

2. J'ajouterai encore que comme la terre n'eſt pas exactement ſphérique, la quantité $\frac{M}{aa}$ n'exprime pas exactement la peſanteur primitive ſous l'équateur, & qu'ainſi au lieu de $\frac{M}{aa}$ & de $\frac{\sqrt{M}}{a}$, il faudroit mettre $\frac{M\lambda}{aa}$, & $\frac{\sqrt{(M\lambda)}}{a}$, λ étant une quantité très-peu différente de l'unité. Cette quantité λ diſparoîtra dans la valeur de aa, mais il faudra avoir ſoin, ſi on veut avoir une ſolution rigoureuſement exacte à cet égard, de prendre pour k la valeur qui convient à la viteſſe de projection, eu égard à la peſanteur ſous l'équateur, & au lieu de 15 pieds par ſeconde, qu'on ſuppoſe parcourus

courus par les corps peſans, il faut prendre l'eſpace réel & exact que les corps peſans parcourent ſous l'équateur durant l'eſpace d'une ſeconde. Au reſte, toutes ces conſidérations apporteront peu de changement à la valeur de aa que nous avons donnée.

3. Si on avoit quelque ſcrupule ſur la ſuppoſition que nous avons faite de $BD =$ à très-peu-près à k, on pourra le lever aiſément par la conſidération ſuivante. Soit $a = 1$, $CB = x$, & au point B ſommet de l'ellipſe, on aura par la théorie connue des trajectoires $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2M}{xggkk} - \frac{2M}{ggkk} = 0$. (Voyez nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, pag. 16, art. 8.) Maintenant ſoit $x = 1 + t$, $k^2 = 1 - \alpha$, t étant une quantité fort petite, ainſi que α, cette équation ſe changera à très-peu-près en $\alpha + 2t - \frac{2Mt}{gg} = 0$, or il eſt aiſé de voir que $\alpha =$ à très-peu-près $\frac{2pk}{gg} =$ à très-peu-près $\frac{2pk.289}{pa}$, & que $M = paa = p$, à cauſe de $a = 1$; d'où l'on voit que $2k.289 + 2t - \frac{2pt.289}{p} = 0$. Donc $t =$ à très-peu-près k.

Si on vouloit trouver la valeur de t plus rigoureuſement, il eſt clair qu'on le pourroit facilement au moyen de l'équation rigoureuſe $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2M}{xggkk}$

$-\frac{2M}{ggkk}=0$. Mais le calcul précédent ſuffit pour nous donner la valeur approchée de t qui nous eſt néceſſaire, & pour prouver que cette valeur eſt ſenſiblement égale à k. Ceux qui voudront réſoudre plus exactement le problême dont il s'agit ici, par les valeurs rigoureuſes de BD & de aa, le pourront aiſément au moyen de toutes les remarques précédentes.

Note (a^8), *article* 22.

1. Si dans la proportion de l'art. 6, l'angle u eſt ſuppoſé fort petit, on aura à très-peu-près $\frac{u+mu}{(1+m)^{\frac{3}{2}}}$: $\frac{u\sqrt{(1-mm)}}{1+m}$ :: $17 \cdot 1$, ou à très-peu-près $17\sqrt{(1-mm)}$ $=(1+m)^{\frac{3}{2}}$, ou $17\sqrt{(1-m)}=1$; d'où l'on voit que $m=1-\frac{1}{289}$, & que $1-mm$ eſt à peu près $=\frac{2}{289}$; & le demi-petit axe $a\sqrt{(1-mm)}=$ à très-peu-près $\frac{a}{12}$, ou plus exactement $\frac{a}{\sqrt{(144\frac{1}{2})}} \cdot \frac{a}{12+\frac{1}{48}}$.

2. On peut aiſément trouver la valeur de m par une approximation plus exacte, en mettant au lieu de ſin. u & angl. ſin. $\left(\frac{u\sqrt{(1-mm)}}{1+m\,\text{coſ}\,u}\right)$ leurs valeurs en u dans la proportion $u+m$ ſin. u : $(1+m\,\text{coſ.}\,u)^{\frac{3}{2}}$. angl. ſin. $\left(\frac{u\sqrt{(1-mm)}}{1+m\,\text{coſ}\,u}\right)$ :: $17 \cdot 1$, ce qui eſt toujours

facile quand u eſt ſuppoſé peu conſidérable, puiſque ſin. u eſt alors $= \mu - \frac{u^3}{2.3} + \frac{u^5}{2.3.4.5}$, &c. & angl. $\left(\frac{\text{ſin. } u\sqrt{(1-mm)}}{1+m\text{ cof. } u}\right) = \frac{\text{ſin } u\sqrt{(1-mm)}}{1+m\text{ cof. } u} +$ $\frac{\text{ſin } u^3(1-mm)^{\frac{1}{2}}}{2.3(1+m\text{ cof. } u)^3}$, &c. le calcul en eſt plus long que difficile. Mais on voit aiſément par ce même calcul que u étant fort petit, & par conſéquent Ω fort petit, m ne ſauroit avoir qu'une valeur à peu près égale à l'unité, & comme le demi-grand axe a reſte arbitraire, on voit que le problême a une infinité de ſolutions, en ſorte qu'on peut tracer une infinité d'ellipſes dans leſquelles $1-mm = \frac{1}{1+\alpha}$, & qui, en faiſant le rayon $r =$ au rayon de la terre, donneront l'angle Ω, & par conſéquent l'angle u. Cependant il faut remarquer que cette ſolution ſuppoſe que non-ſeulement l'angle Ω ſoit très-petit, mais auſſi l'angle u. Or l'angle Ω pourroit être fort petit ſans que l'angle u le fût; car on a (note a^6) ſin. $u =$ ſin. $\Omega \times \frac{\sqrt{(1-mm)}}{1-m\text{ cof. } \Omega}$, faiſ $m = 1-\alpha$, & cof. $\Omega = 1 - \frac{\Omega^2}{2}$ à très-peu-près, en ſuppoſant Ω très-petit, on aura ſin. $u =$ (à très-peu-près) $\frac{\text{ſin. } \Omega\sqrt{(2\alpha-\alpha^2)}}{\frac{\Omega}{2}+\alpha}$, quantité qui n'eſt très-petite (Ω étant déja très petit) que dans le cas où α eſt beau-

coup plus grand que $\frac{\Omega^2}{2}$. Nous reviendrons dans un moment ſur ce ſujet, mais nous obſerverons ici que dans le cas où u ſera très-petit, deux valeurs de u, toutes deux très petites, mais très-différentes, donnent deux valeurs très-différentes de Ω, puiſque ces valeurs ſont à très-peu près proportionnelles aux valeurs de u, ſin. Ω érant $= \frac{\text{ſin } u\sqrt{(1-mm)}}{1+m\cos u} =$ à très-peu près $\frac{\text{ſin } u\sqrt{(1-m^2)}}{1+m}$, lorſque u eſt fort petit.

3. Donc réciproquement une même valeur de Ω ſuppoſée très-petite, ne ſauroit donner deux valeurs de u très petites & très différentes.

4. Donc lorſque le corps eſt lancé avec une viteſſe de projection très petite par rapport à la viteſſe de rotation de la terre, il n'y a qu'une ſeule projection & direction à lui donner, pour qu'il retombe dans un temps donné au même point d'où il eſt parti. Mais ſi le temps n'eſt pas donné, il eſt clair qu'on peut imprimer au corps une infinité de viteſſes & de directions différentes pour le faire tomber au même point, dans le cas même où Ω & u ſeront fort petits l'un & l'autre ; & dans le cas où Ω & u ne ſeroient pas très-petits, ou dans lequel Ω ſeulement ſeroit très-petit, on aura encore une infinité de ſolutions, puiſque u étant pris à volonté, on aura toujours une valeur correſpondante de m.

5. On a trouvé ci-deſſus (art. 19 & ſuiv.) $Aa = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(ak)}}{17}$, $k = \frac{\mu^2 \text{ pieds}}{4\times 15}$; $a = 1500\times 2500\times 6$ pieds; d'où il s'enſuit que $Aa = \frac{2\sqrt{2}.\mu.10.50.\sqrt{6}}{2.17} = \frac{2\mu.500.\sqrt{3}\text{ pieds}}{17}$. Or la circonférence de la terre eſt d'environ 9000 lieues $= 9000\times 2500\times 6$ pieds. Donc le rapport de Aa à 360° ſera celui de $\frac{2\mu.500.\sqrt{3}}{17}$ à $9000.2500.6$, ou de $\frac{\mu}{5.9000.17\sqrt{3}}$ à 1. Donc ſi $\mu = 1800$ (ce qui eſt à peu-près la plus grande valeur poſſible de μ) ce rapport ſera celui de $\frac{1}{25.17\sqrt{3}}$ à 1. Ainſi lorſque le corps ſera lancé perpendiculairement ſous l'équateur, la plus grande valeur de Aa ſera de $\frac{360^\circ}{25.17\sqrt{3}}$, c'eſt-à-dire, ne ſera pas d'un demi-degré.

6. Le rayon r de l'ellipſe décrite par le corps grave étant $\frac{2(1-mm)}{1-m\cos\Omega}$; il eſt clair que ſi l'angle Ω eſt ſuppoſé peu conſidérable, on aura $\cos\Omega = 1 - \frac{\Omega^2}{2}$ à très-peu-près; de plus, ſoit $m = 1-\alpha$, α étant fort petit, on aura $r = \frac{2(2\alpha-\alpha\alpha)}{\alpha+\frac{(1-\alpha)\Omega^2}{2}}$, & ſi Ω^2 eſt beaucoup plus petit que α, on aura l'aire du ſecteur ellip-

tique $\int \frac{rr\,d\Omega}{2}$ = à très-peu-près à l'intégrale de $\left[\frac{a^2\,d\Omega}{2} \times (2\alpha - \alpha\alpha)^2 \times \frac{1}{\Omega^4} \times \left(1 - \frac{\Omega^2}{\alpha}\right)\right]$, intégrale facile à trouver, & par le moyen de laquelle on déterminera avec toute la préciſion qu'on peut deſirer, la valeur de l'eſpace $ABaDA$.

7. Il eſt viſible que Ω étant ſuppoſé fort petit, ainſi que α, Ω^2 ſera conſidérablement $< \alpha$, ſi Ω eſt de l'ordre de α ou au-deſſus.

8. Lorſque $\Omega = 0$, on a $r = a(1+m) = a(2-\alpha)$; & tant que Ω^2 eſt beaucoup $< \alpha$, on a $r =$ à très-peu-près $\frac{a(2\alpha - \alpha\alpha)}{2\left(1 + \frac{\Omega^2}{2\alpha}\right)} = a(2-\alpha) \times \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\alpha}\right)$; c'eſt pourquoi la différence des rayons qui répondent à l'angle $\Omega = 0$, & à l'angle Ω ſuppoſé très-petit, ſera à très-peu près $\frac{a\Omega^2}{\alpha}$, & comme l'ordonnée correſpondante eſt $a\Omega$ à très-peu près, ou $2a\Omega$ à très-peu-près, on voit que le rapport de l'abſciſſe (priſe depuis le ſommet de l'ellipſe) à l'ordonnée correſpondante, eſt à peu-près celui de Ω à 2α.

9. De-là il réſulte que ſi l'abſciſſe priſe depuis le ſommet, eſt beaucoup plus petite que l'ordonnée correſpondante, ou n'eſt pas beaucoup plus grande, on pourra ſuppoſer Ω^2 très-petit par rapport à α, & par conſéquent employer la méthode qu'on vient d'indiquer pour

trouver l'eſpace $ABaDA$ avec toute la préciſion dont on peut avoir beſoin.

10. On peut encore, ſi l'on veut, s'y prendre autrement pour trouver l'eſpace $ABaDA$, en conſidérant, que ſi c eſt le demi-petit axe, y, l'ordonnée, & x l'abſciſſe priſe depuis le ſommet, on aura $y = \frac{c}{a}\sqrt{(2ax - xx)} = \frac{c}{a} \times \left(\sqrt{2ax} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{(2a)}}\right)$; d'où l'on trouvera facilement l'intégrale $\int y\,dx = \frac{c}{a} \times \left(\frac{2}{3} \cdot Bd \cdot AD - \frac{1}{3} \times \frac{AD^3}{8a}\right)$; or l'eſpace $ADd =$ à très-peu-près $\frac{1}{2} Dd \times AD - \frac{1}{3} \times \frac{AD^3}{8a}$; donc, &c.

11. Si dans l'art. 1 de la note (a^6) on ſuppoſe Ω ſi petit, que cof. Ω puiſſe être ſuppoſé $= 1$, on aura en mettant pour u ſa valeur approchée $\frac{\Omega\sqrt{(1-mm)}}{1-m}$, l'équation $\frac{(1-m)^{\frac{3}{2}}}{1-mm} + \frac{m(1-m)^{\frac{3}{2}}}{1-mm} = 17$; d'où l'on tire, comme dans l'article 1 de la préſente note, $17\sqrt{(1-m)} = 1$.

12. Et ſi on ſuppoſe Ω très-petit, mais de maniere que cof. Ω ne puiſſe pas être ſuppoſé $= 1$ dans la quantité $1 - m$ cof. Ω, alors faiſant $1 - m = a$, comme ci-deſſus, on aura $1 - m$ cof. $\Omega =$ à très peu-près $1 - (1-a)\left(1 - \frac{\Omega^2}{2}\right)$

$= a + \frac{\Omega^2}{2}$, $u =$ à l'angle dont le ſinus eſt $\frac{\text{ſin. } \Omega . 2a}{a + \frac{\Omega^2}{2}} =$

$\frac{2 \text{ ſin } \Omega}{1 + \frac{\Omega^2}{2a}}$, & l'équation ſera à très-peu près

$$\frac{u(\pi + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}}{\Omega - (2\pi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\text{ſin. } \Omega \left(a + \frac{\Omega^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Omega(2\pi)} = 17.$$

Note (a^9), *article* 22.

1. Il réſulte des calculs de l'art. 28, que ſi $\nu = 0$, on aura, en regardant Ω comme fort petit, $\Omega =$ à très-peu-près $\frac{\sqrt{(2k)}}{17\sqrt{a}}$, diviſé par $\left(1 - \frac{1}{289}\right)$, d'où $\Omega^2 = \frac{2k}{289\,a}$ à très-peu près, les mêmes formules de l'art. 28, donnent $m = 1 - \frac{1}{289}$; & par conſéquent $\alpha = \frac{1}{289}$, & le demi-petit axe $a\sqrt{(1 - mm)} = \frac{a}{17 + \frac{1}{17}}$; d'où il eſt clair que k étant toujours beaucoup plus petit que a, la valeur de Ω^2 eſt conſidérablement plus petite que celle de α; en effet, la plus grande valeur de k, ſuivant l'expérience, (note (a^8) art. 5) eſt environ $= \frac{(1800)^2 \text{ pieds}}{4.15} = 54000$ pieds, & celle de a eſt de $1500 \times 2500 \times 6$ pieds; or ces deux valeurs ſont entr'elles comme 9 à 150×25, ou comme 3 à 1250. Ainſi on pourra

pourra faire uſage des calculs indiqués dans la note précédente, lorſque $r = 0$.

2. Puiſque $\text{ſin. } u = \frac{\text{ſin } \Omega \sqrt{(1-mm)}}{1-m \text{ cof. } \Omega}$, on aura ſin. u = à très-peu-près $\frac{\text{ſin. } \Omega \sqrt{(2\alpha-\alpha\alpha)}}{\alpha + \frac{(1-\alpha)\text{ ſin. } \Omega^2}{2}}$, ou $\frac{\sqrt{(2\alpha-\alpha\alpha)}}{\alpha} \times \left[\text{ſin. } \Omega - \frac{\text{ſin } \Omega^3}{2\alpha}\right]$, on aura de même ſort aiſément les valeurs approchées de $\text{cof } u = \frac{\text{cof } \Omega - m}{1-m \text{ cof. } \Omega}$, & de $1 + m \text{ cof. } u = \frac{1-mm}{1-m \text{ cof. } \Omega}$; d'où il ſera aiſé de tirer la valeur auſſi approchée qu'on voudra, de l'angle que nous avons nommé $2\Omega'$ dans l'art. 28, & qui eſt proportionnel au ſecteur elliptique, ou à peu près parabolique $ABaDA$. Je me contente d'indiquer ces calculs à cauſe de leur facilité, les réſultats que nous avons donnés, art. 29, ſuffiſant d'ailleurs pour les cas ordinaires.

3. Si le corps eſt lancé horiſontalement ſous l'équateur avec une viteſſe abſolue g, telle que $g^2 = \frac{2M}{a} - \frac{M}{a}$, il décrira une ellipſe dont le grand axe ſera $2a$, le petit axe $2a\sqrt{(1-mm)}$, le demi-paramètre p ou $a(1-mm) = \frac{2aaM}{aM} - \frac{Maa}{Ma} = 2a - \frac{aa}{a}$; or pour que le corps revienne au même point de la terre d'où

il a été lancé, il faut que g ſoit à G comme l'aire de l'ellipſe à l'aire du cercle dont le rayon eſt a, c'eſt-à-dire, comme $a^2\sqrt{(1-mm)}$ à a^2; on aura donc $g^2 : G^2 = a^4(1-mm) : a^4$, c'eſt à dire, $\frac{2}{a} - \frac{1}{a} : \frac{1}{(17)^2 a} :: a^3\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right) : a^3$; donc $a^3 = (17)^2 a^3$, d'où l'on tire aiſément la viteſſe g, & par conſéquent la viteſſe de projection $g - G$, qu'il faudroit imprimer horiſontalement au corps, pour qu'après un jour révolu, il revînt au même point de la terre d'où il eſt parti.

4 Si l'on fait $g : G :: a^2\sqrt{(1-mm)} : a\,a \times k$, k exprimant un nombre entier quelconque, on aura $a^3 = (17)^2 a^3 k^2$, la terre fera k révolutions pendant que le corps en fera une; & au bout de ce temps, le corps reviendra au point d'où il eſt parti.

5. Il faut remarquer que a ne doit pas être $< a$, autrement le grand diametre $2a$ de l'ellipſe ſeroit plus petit que le diametre $2a$ de la terre, & le corps ne pourroit réellement décrire cette ellipſe, à cauſe de la ſolidité de la terre qui s'y oppoſeroit. Or dans le cas préſent où k eſt > 1, il eſt clair que a^3 étant $= 17^2 a^3 k^2$, on a $a > a$.

6. Si k eſt une fraction $= \frac{p}{q}$, p étant $< q$, alors, 1°. pour avoir les points où le corps & la terre ſe rencontreront, il faut conſidérer que la terre fera une partie $\frac{p}{q}$ de ſa révolution pendant que le corps en fera une;

2°. que a^3 doit être au moins égal à a^3, d'où il s'enſuit que $17^2 k^2$ ne doit pas être < 1, & $k < \frac{1}{17}$. Si $k = \frac{1}{17}$, on aura $a = a$, le corps rasera alors continuellement la ſurface de la terre, en décrivant un cercle, & en ne preſſant point la ſurface, parce que ſa force centrifuge détruira l'effet de la peſanteur, la terre fera $\frac{1}{17}$ de révolution pendant que le corps en ſera une, & le corps reviendra au point d'où il eſt parti, après avoir parcouru un arc α, tel que $\alpha - \frac{\alpha}{17} = 360°$ pris tel nombre de fois qu'on voudra, la plus petite valeur de α ſera $\frac{360° \cdot 17}{16}$; la ſeconde ſera double de celle-là, la troiſiéme, triple, &c.

7. Si $k > \frac{1}{17}$, mais $= \frac{p}{q}$, p étant $<$ ou $> q$, le corps fera dans ſon ellipſe q révolutions pendant que la terre en fera p, & le corps ne ſe retrouvera qu'au bout de ce temps au même point d'où il étoit parti; mais il retombera ſur la terre au bout d'une révolution, ſur un point différent de celui d'où il a été lancé. Ce point ſera plus oriental, ſi q eſt $> p$, & ſi $360\left(1 - \frac{p}{q}\right)$ eſt < 180; & plus occidental ſi q étant $> p$, on a $360\left(1 - \frac{p}{q}\right) > 180$; il ſera plus occidental, ſi q eſt $< p$, & $360\left(\frac{p}{q} - 1\right) < n.360 + 180$, n étant un nombre entier poſitif, en y comprenant zero; &

plus oriental, ſi q étant $< p$, on a $360\left(\frac{p}{q}-1\right) > n.360+180$.

8. Si $17k$ eſt < 1, alors le corps ne pouvant décrire une ellipſe, à cauſe de la ſolidité de la terre, décrira un cercle en raſant la terre, avec une viteſſe uniforme $= g\sqrt{\left(\frac{2M}{a}-\frac{M}{a}\right)} = \sqrt{\frac{M}{a}}\times\sqrt{\left(2-\frac{1}{(17k)^2}\right)}$, & il preſſera la terre avec l'excès de ſa peſanteur ſur la force centrifuge, c'eſt-à-dire, avec une force $= \frac{M}{aa}-\frac{2M}{aa}+\frac{M}{aa} = \frac{M}{aa}-\frac{M}{aa}$.

9. Il faut remarquer encore que l'expreſſion de g, ſavoir $\sqrt{\left(\frac{2M}{a}-\frac{M}{a}\right)}$, ne permet pas que $2a$ ſoit $< a$, puiſqu'alors g ſeroit imaginaire; ainſi dans ce cas même où k eſt $< \frac{1}{17}$, on ne ſauroit ſuppoſer k telle que $2\Psi[(17)^2k^2]$, ſoit < 1; donc 17^2k^2 ne ſauroit être $< \frac{1}{8}$, & $k < \frac{1}{2.17\sqrt{2}}$.

10. Dans ce dernier cas, $g.G :: \sqrt{\left(2-\frac{1}{(17k)^2}\right)} : \frac{1}{17}$; & ſi g eſt $> G$, le corps lancé ne retrouvera le point d'où il eſt parti, qu'après avoir parcouru un arc a, tel que $a-\frac{Ga}{g} = 360^\circ$, pris tant de fois qu'on

voudra. Si $G = g$, le corps reſtera toujours au même point de la terre, parce qu'alors $\alpha - \frac{G\alpha}{g} = 0$. Enfin ſi $G > g$, il faudra que $\frac{G\alpha}{g} - \alpha = 360$ pris tant de fois qu'on voudra.

11. On voit aiſément que dans le cas préſent, où $17k$ eſt < 1, on a $\sqrt{\left(2 - \frac{1}{(17k)^{\frac{1}{4}}}\right)} < 1$; & qu'ainſi $\frac{g}{G} < 17$, mais $\frac{g}{G}$ peut être beaucoup moindre que 17, & même $=$ ou preſque $= 0$ ſi $2 - \frac{1}{(17k)^{\frac{1}{4}}}$ eſt $= 0$ ou fort petit.

Note (a^{10}), *article* 44.

1. En général, ſi dans le problême de l'art. 6, on vouloit que le corps grave A retombât au point a, non pas après que le point A de la terre auroit décrit l'arc Aa, mais après qu'il auroit décrit l'arc $Aa + 360$, ou en général $Aa + p.360^{\circ}$, p étant un nombre entier poſitif, ce qui dans tous les cas feroit retomber le corps grave au même point, on auroit dans la proportion de l'art. 8, $(1 + m \text{ cof. } u)^{\frac{1}{2}} \times (p.360 + \Omega)$, au lieu du ſecond terme de cette proportion, lequel eſt égal à $(1 + m \text{ cof. } u)^{\frac{1}{2}}\Omega$, & les ordonnées de la courbe qui ſert à trouver m (voyez ce même art. 8);

feroient augmentées de la quantité $(1 - m \text{ cof. } u)^{\frac{1}{2}} \times p.360^{\circ}$, en ſorte que la derniere ordonnée (répondante à $m = 1$), au lieu d'être égale à zero comme dans l'art. 9, ſeroit égale à $(1 - m \text{ cof. } u)^{\frac{1}{2}} \times p \times 360^{\circ}$. Donc ſi cette ordonnée priſe 17 fois eſt plus petite que l'abſciſſe correſpondante $u + \text{ſin. } u$, l'angle u étant ſuppoſé donné, la ſolution ſera toujours poſſible. On voit de plus, par les art. 30 & 31, que dans le cas dont il s'agit ici, la ſolution eſt toujours poſſible, en ſuppoſant même que le corps ſoit lancé verticalement, ſans aucune impulſion horiſontale, pourvu qu'il le ſoit avec la viteſſe convenable.

2. Donc en général ayant trouvé (art. 10) l'angle u & la quantité m correſpondante, qui doivent faire retomber le corps au même point, après que le point A aura décrit l'arc $Aa = 2\Omega$, on trouvera de même & par une méthode analogue, lorſque la choſe ſera poſſible, quelle eſt la viteſſe de projection néceſſaire pour faire retomber le corps au même point après que le point A de la terre aura décrit l'arc $2\Omega + p.360^{\circ}$, & on peut, ſous ce point de vue, aſſigner différens angles & différentes viteſſes de projection, qui feroient toutes retomber le corps au même point d'où il eſt parti, ſoit avant que la terre ait fait une révolution, ſoit quand elle en aura fait un nombre donné.

3. Il eſt preſqu'inutile de remarquer que dans le cas de la note (a') ſi $G' = G$, cas où le corps décrit une ligne

droite verticale, on aura $Aa=0$, (Fig. 49) & aa ou $\frac{Aa}{\sqrt{\left(\frac{M}{2\pi a}\right)}}=\frac{4k}{\sqrt{\left(\frac{2Mk}{aa}\right)}}$; d'où l'on tire $aa=17.2\sqrt{(2ka)}$; & ſi $G'-G$ étoit négatif, alors ρa au lieu d'être $=Aa-Aa$ ſeroit $=Aa+Aa$, le point a ſe trouvant alors de l'autre côté de A.

Note (a^{11}), *article* 55.

Nous avons ſuppoſé dans les recherches précédentes, que la viteſſe de rotation de la terre étoit donnée, comme elle l'eſt en effet; mais ſi elle ne l'étoit pas, il ſeroit très-facile de trouver quelle elle devroit être, pour que le corps A lancé avec une viteſſe & une direction donnée, retombât au même point, car ayant décrit l'ellipſe ABa, que doit parcourir le corps en vertu de ſa viteſſe & de ſa direction, & connoiſſant ſa viteſſe horiſontale en A, on multipliera cette viteſſe par le ſecteur circulaire ACa, & on la diviſera par le ſecteur elliptique $ABaC$, ce qui donnera la viteſſe de rotation de la terre. Cette conſidération peut faire comprendre aux Lecteurs même les moins Géomètres, la vérité du paradoxe avancé au commencement de ce Mémoire, ſavoir, qu'il faut imprimer au corps lancé une certaine viteſſe horiſontale, pour qu'il retombe préciſément au même point. Car il eſt aiſé de voir que $ABaC$ étant $<ACa$, la viteſſe de rotation de la terre ſera plus petite que la viteſſe hori-

ſontale abſolue du corps A. D'où il eſt évident que le corps A doit néceſſairement recevoir quelque viteſſe horiſontale de la part de la main ou de l'inſtrument qui le lance, indépendamment de la viteſſe horiſontale qu'il reçoit néceſſairement de la rotation de la terre.

Note (a^{13}), *article 55.*

1. Ayant trouvé l'ellipſe ABa, (Fig. 49) que le corps doit décrire pour retomber au même point d'où il eſt lancé, il eſt évident que ſi au point B de l'ellipſe ABa, le corps eſt lancé horiſontalement avec une viteſſe abſolue égale à celle qu'il a en ce point, il retombera préciſément au point de la terre placé verticalement au-deſſous de B, car ce point eſt D, & il eſt évident par les ſolutions précédentes, que le point D décrira l'arc Da pendant que le point B décrit l'arc Ba. Si donc la viteſſe abſolue imprimée au corps en B, étoit $= \frac{G \times CB}{CD}$, c'eſt-à-dire, égale à la viteſſe que le point B reçoit par la rotation de la terre, le corps n'auroit beſoin d'aucune viteſſe horiſontale de projection pour retomber au point D, quand ce point D ſeroit arrivé en A.

2. Or il eſt d'abord évident que ce cas ne ſauroit avoir lieu ſi BD eſt fort petit par rapport a AC. Car en ce cas BA eſt preſqu'une parabole, & $\frac{BaC}{DAC} =$

à

à très-peu-près $\frac{aD\times\left(\frac{2}{3}BD+\frac{DC}{2}\right)}{aD\times\frac{DC}{2}}=1+\frac{4BD}{3DC}$.

Donc ſi les viteſſes en B, D ſont entr'elles comme BC à DC, les temps par les arcs Ba, Da ſont entr'eux comme $1+\frac{4BD}{3DC}$ à $1+\frac{BD}{DC}$, c'eſt-à-dire, que le premier eſt plus grand que le ſecond. Donc le corps lancé retomberoit ſur un point plus occidental que D.

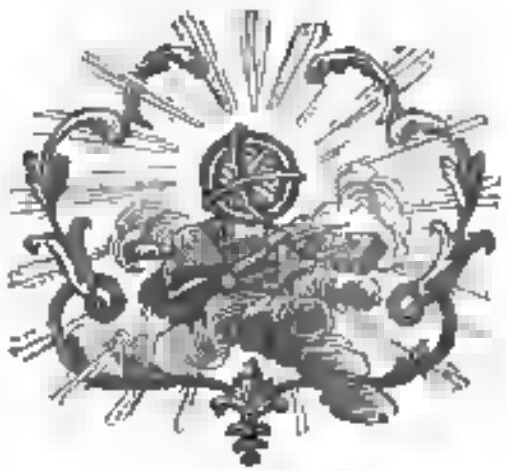
3. En général, le quarré de la viteſſe en B eſt $=\frac{2M}{2(1+m)}-\frac{M}{2}=\frac{M}{2}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)=\frac{M(1-m)(1+m\text{ cof. }u)}{a(1+m)}$, or pour que les points B & D arrivent en même-temps au point a, ſans que le point B ait reçu aucune impulſion horiſontale, il faut que le quarré de la viteſſe en B ſoit au quarré de la viteſſe en D, comme BC^2 à DC^2; c'eſt-à-dire, comme $aa(1+m)^2$ à a^2, ou comme $(1+m)^2$ à $(1+m\text{ cof. }u)^2$, donc le quarré de la viteſſe du point D doit être $=\frac{M(1-m)(1+m\text{ cof. }u)^2}{a(1+m)^2}$. Et comme le quarré de cette viteſſe doit d'ailleurs être $=\frac{M}{(17)^2a}$, il s'enſuit qu'on aura $\frac{(1-m)(1+m\text{ cof. }u)^2}{(1+m)^2}=\frac{1}{(17)^2}$. Dela on tire la valeur de cof. u en m, ſavoir, $(1+m\text{ cof. }u)^2=$

$\frac{(1+m)^3}{(1-m)17^2}$; d'où l'on voit que cof. u doit être entre 1 & 0, & par conſéquent avoir une valeur poſſible, puiſque cof. $u=1$, donne le premier membre $>$ que le ſecond, & cof. $u=0$, le premier membre $<$ que le ſecond, ſi m eſt tel que $(1-m)17^2<(1+m)^3$. On cherchera enſuite parmi les courbes de l'art. 9, dont les coordonnées ſont $u+m$ ſin. u & $(1+m\,\text{cof.}\,u)^{\frac{3}{2}}\Omega$, celle qui ſatisfait en même-temps, & par la même valeur de m, à la condition précédente, & à la proportion de l'art. 6. Par-là on connoîtra u & m, & on aura facilement enſuite le demi-axe $2a$ de cette ellipſe, c'eſt-à-dire, $\frac{2a}{1+m\,\text{cof.}\,u}$, & la hauteur $BD=2a(1+m)-a$.

Note (a^{13}), *article* 40.

Soit MP (Fig. 54) l'arc de grand cercle & MN l'arc de petit cercle, à qui la corde en queſtion eſt commune, les tangentes QM, RM de ces deux arcs donneront le plan tangent de la ſphere en M, lequel ſera perpendiculaire au plan du grand cercle MP, or le plan DCF (Fig. 52) qui coupe les deux arcs par la moitié ſera auſſi perpendiculaire au plan du grand cercle MP. Donc la commune ſection RQ du plan tangent & du plan DCF ſera perpendiculaire au plan MP, & par conſéquent à MR. De plus, il eſt aiſé

de voir que MR & MQ feront les tangentes des deux arcs; & que la tangente de l'angle n, repréſenté par l'arc $NM = \frac{MQ}{BF}$, donc cof. RMQ ou $\frac{MR}{MQ} = \frac{\text{tang } n}{\text{tang } n \cdot BF}$,



§. II.

Sur la rotation d'un corps de figure quelconque.

1. ON ſait que lorſqu'un corps de figure quelconque tourne, ou plutôt pirouette d'une maniere quelconque ſur ſon centre de gravité, il y a toujours une ligne paſſant par ce centre, autour de laquelle le corps tourne dans un inſtant quelconque, ligne qui peut varier pour chacun des inſtans de mouvement. J'ai donné dans le Tome I de mes *Opuſc.* pag. 95 & ſuiv., les équations néceſſaires pour déterminer à chaque inſtant la poſition de cette ligne ou axe de rotation. Voici encore une maniere d'y parvenir, plus ſimple qu'aucune que je connoiſſe.

2. Imaginons une ligne à volonté, qui paſſe par le centre de gravité du corps, & que j'appellerai *axe* du corps; & un plan paſſant auſſi par le centre de gravité, & perpendiculaire à l'axe, plan que je nommerai *l'équateur* du corps. Soit pris ſur l'axe depuis le centre une longueur à volonté que j'appelle 1, & ſoit $d\omega$ le mouvement de ce point, faiſons paſſer par la petite ligne $d\omega$, & par l'axe du corps, un plan qui coupera l'équateur du corps en CAB (Fig. 55), C étant le centre de gravité, & ſoit menée dans le plan de l'équateur la ligne DCE perpendiculaire à ACB.

3. Cela posé, imaginons, suivant la théorie que j'ai donnée à l'endroit cité, de la rotation des corps de figure quelconque, que tandis que l'axe & la ligne ACB, se meuvent du mouvement angulaire $d\omega$ dans le plan qui passe par l'axe & par $d\omega$, la ligne DCE se meuve autour du centre C d'un mouvement angulaire qui soit $= d\xi$ à la distance 1, supposons ensuite que le mouvement angulaire $d\omega$ soit de C vers B, & le mouvement angulaire $d\xi$ de E vers B, il est clair, 1°. que tous les points placés a une distance quelconque ρ, perpendiculaire à la ligne DCE, auront parallèlement a CB un mouvement $= \rho d\omega$; 2°. que dans le plan parallèle à l'équateur, & placé à la distance ρ, tous les points éloignés de l'axe de la distance f, auront un mouvement $f d\xi$ dans le sens EBD. Donc prenant ρ quelconque, si on prend f ou CV tel que $\frac{f}{\rho} = \frac{d\omega}{d\xi}$, il est clair que tous les points placés dans la diagonale du rectangle qui a pour côtés f & ρ, auront des mouvemens opposés & égaux, & par conséquent seront en repos. Cette ligne sera donc le véritable axe de rotation qui ne sauroit, ce me semble, être déterminé par une équation plus facile & plus simple.

4. Puisqu'à chaque instant du mouvement il y a un axe de rotation, il est donc clair qu'il y a dans le corps une ligne fixe pendant chaque instant, c'est-a-dire, qui au commencement & a la fin de l'instant a la même position.

5. M. Euler a obſervé (Mém. de Peterſb. Tom. XX), qu'il en étoit de même pour un temps quelconque ; & nous allons prouver par un calcul très-ſimple que cela eſt en effet, c'eſt-à-dire qu'en ſuppoſant le centre de gravité immobile, il y a, au bout d'un temps quelconque, une ligne du corps, paſſant par le centre de gravité, qui ſe retrouve dans la même poſition où elle étoit au premier inſtant.

6. Pour le démontrer, imaginons que l'axe du corps ſoit au commencement du mouvement, & au bout d'un temps quelconque t, dans deux ſituations différentes & quelconques, & par ces deux poſitions, imaginons un plan qui coupe l'équateur en ACB ; cela poſé,

7. Je ſuppoſe, pour ne point me répéter, qu'on ait ici ſous les yeux le Tome I de nos *Opuſcules*, IIe Mémoire, je nomme Π l'angle formé par les deux ſituations de l'axe au commencement du mouvement, & au bout du temps t, & faiſant pour abréger $a - b = \rho$, j'aurai d'abord, page 79 du volume cité, $\varpi = \rho$ ſin. $\Pi + f$ coſ. Π coſ. $(\xi + P)$; enſuite, comme on peut ſuppoſer le plan de projection tel que $e = 0$, j'aurai (*ibid.*) ſin. $e = 0$, & coſ. $e = 1$, donc $u = \rho$ coſ. $\Pi - f$ ſin. Π coſ. $(\xi + P)$, & $\zeta = f$ ſin. $(\xi + P)$.

8. Or il faut trouver le point où ces valeurs ſont les mêmes que lorſque $t = 0$, $P = 0$, $\Pi = 0$, ce qui donne les trois équations

f sin. $\Pi + f$ cos. Π cos. $(\xi + P) = f$ cos. ξ,
f cos. $\Pi - f$ sin. Π cos. $(\xi + P) = \rho$,
f sin. $(\xi + P) = f$ sin. ξ.

9. Les valeurs de $\frac{\rho}{f}$ tirées des deux premieres équations, donnent $\frac{\text{cos } \xi - \text{cos } \Pi \text{ cos } (\xi + P)}{\text{sin } \Pi} =$ $\frac{\text{sin } \Pi \text{ cos } (\xi + P)}{\text{cos } \Pi - 1}$, d'où l'on tire $\frac{\text{cos } \xi}{\text{sin. } \Pi} = \text{cos. } (\xi + P) \times \left[\frac{\text{sin } \Pi}{\text{cos } \Pi - 1} + \frac{\text{cos } \Pi}{\text{sin } \Pi}\right] = -\frac{\text{cos. } (\xi + P)(1 - \text{cos } \Pi)}{(\text{cos } \Pi - 1)\text{sin } \Pi}$, donc $-$ cos. $\xi =$ cos. $(\xi + P)$; de plus, la troiſiéme équation donne sin. $\xi =$ sin. $(\xi + P)$, d'où il eſt clair que $\xi + P$ doit être $= 180 - \xi$, & que par conſéquent $\xi = \frac{180 - P}{2}$. Cette valeur de ξ & la valeur trouvée de $\frac{\rho}{f}$ donneront évidemment la poſition de la ligne qui a la même poſition au bout du temps t, qu'elle avoit lorſque $t = 0$. Car il n'y a qu'à faire l'angle $ACF = \xi = \frac{180 - P}{2}$, & prendre $f = \frac{\rho(\text{cos } \Pi - 1)}{\text{sin. } \Pi \text{ cos } (\xi + P)}$; ſi la valeur de f eſt poſitive, il faudra prendre $CF = f$, & la prendre de l'autre côté ſi elle eſt négative. La diagonale du rectangle formé ſur CF & ſur ρ, menée par le point C, ſera évidemment la ligne qu'on cherche.

10. Nous avons ſuppoſé que cette ligne paſſe par le centre de gravité, autour duquel le corps pirouette; mais ſi on faiſoit pirouetter le corps autour d'un autre

point fixe quelconque, il eſt clair que la même propoſition auroit lieu, & qu'il y auroit toujours une ligne paſſant par ce point qui auroit la même poſition au bout du temps t, & lorſque $t = 0$.

11. Imaginons préſentement que le corps ſoit libre; il eſt clair que le mouvement de chaque point ſera compoſé d'un mouvement égal & parallèle à celui du centre de gravité, ou d'un autre point quelconque, & d'un mouvement de pirouettement autour de ce point; d'où il eſt aiſé de conclure que la ligne que nous venons de voir conſerver ſa poſition, demeurera parallèle à elle-même, ſi le centre de gravité, ou le point quelconque par lequel elle paſſe, eſt ſuppoſé ſe mouvoir.

12. Donc non-ſeulement une des lignes qui paſſent par le centre de gravité, ſera parallèle à elle-même, au bout du temps t, & lorſque $t = 0$, mais toutes les lignes menées dans le corps parallèlement à celle-là, auront la même propriété; ce qui eſt évident par la rigidité du corps.

13. Nous avons dit ci-deſſus (art. 7) qu'on peut ſuppoſer le plan de projection tel que $e = 0$, & que de plus $\Pi = 0$ lorſque $t = 0$. En effet, on peut prendre pour ce plan de projection, celui qui paſſe par l'axe & par la ligne DCE, dans le premier inſtant du mouvement, ce qui donne d'abord $\Pi = 0$ lorſque $t = 0$, & comme outre cela l'axe du corps eſt ſuppoſé (au commencement & à la fin du temps t) dans le plan qui

qui paſſe par cet axe & par la ligne ACB, il s'enſuit qu'à la fin du temps t la ligne DCE n'a point changé de poſition ſur le plan de projection, ce qui donne $e = 0$.

14. Nous avons auſſi ſuppoſé (art. 3) que le mouvement $d\omega$ étoit parallèle a CB, & dans le ſens CB, & que le mouvement $d\xi$ ſe faiſoit de E vers B, en ſorte que le mouvement du point V eſt parallèle à CB & en ſens contraire; ſi *un ſeul* de ces deux mouvemens avoit une direction contraire à celle que nous leur ſuppoſons, il faudroit prendre CV de l'autre côté de C; mais ſi *tous les-deux* avoient une direction contraire, V reſteroit du côté où il eſt dans la figure.

§. IV.

Sur l'intégration de quelques équations différentielles.

1. J'AI donné, il y a plus de trente ans, dans les Mém. de l'Acad. de Berlin, la méthode d'intégrer certaines équations linéaires à pluſieurs variables, en multipliant ces équations par des coefficiens conſtans indéterminés, & en les ajoutant enſemble. On pourroit plus généralement ſuppoſer que le coefficient multiplicateur ſoit variable, ce qui donneroit l'intégration

dans plusieurs cas. Soit, par exemple,

$$dt + \rho u dx = 0,$$
$$du + \sigma t dx = 0,$$

σ & ρ étant des fonctions de x, & multiplions la seconde équation par une fonction indéterminée ξ de x, on aura $dt + \xi du + (\rho u + \sigma \xi t) dx = 0$, ou $d(t + \xi u) + \left(\rho u + \sigma \xi t - \frac{u d\xi}{dx}\right) \times dx = 0$, qui sera évidemment intégrable, si $\rho - \frac{d\xi}{dx} = \xi \times (\sigma \xi)$.

2. On pourroit aussi multiplier la premiere équation par un autre coefficient indéterminé ξ', ce qui donneroit, en les ajoutant ensemble $\xi' dt + \xi du + (\rho \xi' u + \sigma \xi t) dx = 0$, ou $d(\xi' t + \xi u) + \left(\rho \xi' u + \sigma \xi t - \frac{u d\xi}{dx} - \frac{\sigma d\xi'}{dx}\right) dx = 0$; équation qui sera intégrable si

$$\frac{\rho \xi' - \frac{d\xi}{dx}}{\xi} = \frac{\sigma \xi - \frac{d\xi'}{dx}}{\xi'}.$$

3. Soient encore les équations $\lambda du + \nu dt + \rho u dx + \sigma t dx = 0$, & $\delta dt + \mu du + \varpi u dx + \gamma t dx = 0$, λ, ν, ρ, σ, δ, μ, &c. étant des fonctions de x, on peut faire évanouir dt de l'une de ces équations, & du de l'autre, en multipliant d'abord la premiere par δ, & la seconde par ν, pour faire évanouir dt, & ensuite la premiere par μ, & la seconde par λ pour faire évanouir du, ce qui donnera deux équations de cette forme

$$du + \rho' u dx + \sigma' t dx = 0,$$
$$dt + \varpi' u dx + \gamma' t dx = 0,$$

Digitized by Google

& on peut opérer de même ſur ces deux équations en multipliant la premiere par ξ', & la ſeconde par ξ, & en faiſant ſi l'on veut $\xi' = 1$.

4. Soit l'équation $ddt + \zeta dt dx + \nu t dx^2 + T dx^2 = 0$, ζ, ν, T étant des fonctions données ou connues de x, on ſait que ſi cette équation eſt intégrable dans le cas de $T = 0$, elle le ſera auſſi en prenant pour T telle fonction de x qu'on voudra.

5. Préſentement ſoit miſe l'équation $ddt + \zeta dt dx + \nu t dx^2 = 0$, ſous la forme $ddt + (\mu + \zeta) dt dx - \mu dt dx + (n + \nu) t dx^2 - n t dx^2 = 0$, μ & n étant des fonctions quelconques & indéterminées de x.

6. Soit fait enſuite $dt + \rho u dx + \sigma t dx = 0$, u étant une nouvelle indéterminée, & ρ, σ des fonctions de x, auſſi indéterminées, on aura $ddt = -\rho du dx - u d\rho dx - \sigma dt dx - t d\sigma dx$, & ſubſtituant les valeurs de dt, de ddt, & de t dans les termes ddt, $-\mu dt dx$, & $-n t dx^2$ de la ſeconde équation, on aura les deux équations.

$$dt + \rho u dx + \sigma t dx = 0,$$

$$\& -du - \frac{u d\rho}{\sigma} - \frac{\sigma dt}{\rho} - \frac{t d\sigma}{\rho} + \frac{\mu \rho u dx^2}{\rho} + \frac{\mu \sigma t dx^2}{\rho} + \frac{(\mu + \zeta) dt dx}{\rho} + \frac{(n + \nu) t dx^2}{\rho} - \frac{n d\rho dx}{\sigma \rho} - \frac{n \rho u dx^2}{\sigma \rho} = 0.$$

On peut mettre, pour abréger, la ſeconde équation ſous cette forme :

$$du+\varpi' dt+\varpi u dx+\gamma t dx=0.$$

7. Soit multipliée la premiere équation par un coefficient indéterminé ξ, qui ſoit une fonction inconnue de x; & ſoient ajoutées enſemble les deux équations, on aura l'équation $du+(\xi+\varpi')dt+(\varpi u+\rho\xi u)dx+(\sigma\xi+\gamma)tdx=0$; qu'on peut mettre ſous cette forme

$$d(u+\xi t+\varpi' t)+udx(\varpi+\rho\xi)+tdx\left(\sigma\xi+\gamma-\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\varpi'}{dx}\right)=0,$$

équation qui ſera évidemment intégrable, ſi on a

$$\varpi+\rho\xi=\frac{\sigma\xi+\gamma-\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\varpi'}{dx}}{\xi+\varpi}.$$

8. Or comme les quantités ρ & σ ſont indéterminées, ainſi que μ & ν, d'où dépendent ϖ, ϖ' & γ, on voit que cette équation de condition renferme pluſieurs indéterminées, par le moyen deſquelles on pourra peut-être parvenir, au moins en pluſieurs cas, à l'intégration de l'équation différentielle propoſée, laquelle intégration ſe réduit à déterminer ξ par l'équation différentielle précédente.

9. Connoiſſant ξ, on aura la valeur de $u+\xi t+\varpi' t$ en x, & par conſéquent u en t & x, de maniere que t ne ſera qu'au premier degré dans cette équation, & pour lors en ſubſtituant cette valeur de u dans l'équation $dt+\rho u dx+\sigma t dx=0$, elle s'intégrera par les

méthodes connues, & donnera la valeur cherchée de t en x.

10. Nous laiſſons aux Géomètres à pouſſer plus loin ces vues, qui pourroient s'étendre à plus de deux équations, & aux équations différentielles d'un ordre plus élevé, pourvu que les inconnues & leurs différences n'y fuſſent élevées qu'au premier degré.

11. En effet, ſi on a pluſieurs équations différentielles du premier degré, il n'y a qu'à les multiplier ſucceſſivement par ξ', ξ, ζ, &c en ſuppoſant ſi l'on veut $\xi' = 1$, & enſuite les ajouter enſemble, & ſuppoſer que la réſultante puiſſe être repréſentée par $d(t + \xi u + \zeta y + \&c.) + X(t + \xi u + \zeta y \&c.)\,dx = 0$.

12. Et ſi on a des équations différentielles d'un ordre plus élevé, on les réduira à pluſieurs équations différentielles du premier degré, en introduiſant de nouvelles inconnues, comme on a fait ci-deſſus pour l'équation $ddt + \zeta dt dx \&c. = 0$, & on opérera enſuite ſur toutes ces équations différentielles du premier degré, en employant la méthode que nous venons d'expoſer.

13. A l'occaſion de ces recherches ſur les équations différentielles du ſecond ordre, j'obſerverai qu'il faut ajouter quelque choſe à la méthode que j'ai donnée ſur ce ſujet (Mém. Acad. 1769, pag. 108), pour compléter cette méthode. Soit α' la valeur de $\frac{dt}{d\xi}$ lorſque $\xi = 0$, valeur qu'on ſuppoſe donnée, il faut d'abord

intégrer l'équation $ddt + \alpha t dz^2 + \varphi dz^2 = 0$ (φ étant une fonction donnée de t & de z), en multipliant par dt, ce qui donne $dt + \alpha t^2 dz^2 + 2dz^2 \int \varphi dt + k^2 = 0$, & on ſubſtituera toujours à la place de dt^2 cette valeur dans les différentiations ſucceſſives. La raiſon de cette opération, c'eſt qu'en faiſant $t = Ac^{Nz}$, la valeur de α' doit influer ſur celle de N, comme il eſt aiſé de le voir en intégrant l'équation $ddt + \alpha t dz^2 + Btdz^2$ &c. $= 0$.

14. Je dois remarquer auſſi, en finiſſant cet article, que j'ai donné, ou plutôt indiqué dans les Mémoires de l'Académie de 1769, pag. 137, une méthode pour intégrer très-facilement, quand cela eſt poſſible, les équations différentielles d'un degré quelconque, où l'inconnue & ſes différences ſont linéaires. D'autres Géomètres ſe ſont depuis exercés avec ſuccès ſur le même objet.

15. J'ajouterai encore que dans les Mémoires de Peterſbourg de 1777, M. *Lexell* remarque avec raiſon que la méthode que j'ai donnée dans ma *Dynamique* pour intégrer pluſieurs équations différentielles linéaires & du ſecond ordre, qui renfermeroient pluſieurs variables, ne peut s'appliquer au cas où ces équations contiendroient des différentielles de divers ordres. Mais j'ai donné depuis, dans les Mém. de Berlin de 1747 & ailleurs, une méthode générale pour intégrer ces équations, fondée ſur un moyen dont M. *Lexell* fait lui-même uſage d'une autre maniere dans le ſavant Mé-

moire qu'il a donné relativement à cet objet, c'eſt-à-dire, fondé ſur la multiplication de toutes les équations par des coefficiens conſtans & indéterminés, après les avoir toutes réduites à des équations différentielles du premier ordre; ce qui eſt très-facile.

APPENDICE

Contenant quelques Remarques relatives à différens endroits de ce VIIe Volume.

Remarque ſur la page 16, art. 40, fig. 8.

ON doit obſerver que nous mettons ici $\frac{dd\gamma}{ds} = \frac{du}{A}$, & non pas $\frac{dd\gamma}{ds} = -\frac{du}{A}$, comme on pourroit d'abord le penſer; parce que la courbe AM du reſſort (Fig. 1) étant convexe vers la tangente horiſontale en B, & les $d\gamma$ allant en diminuant à meſure que $AM(s)$ va en croiſſant, les $dd\gamma$ qui ſeroient poſitifs, ſi $d\gamma$ & s croiſſoient en même-temps, doivent être pris négativement quand $d\gamma$ décroît à meſure que s croît. Donc on doit faire $-\frac{dd\gamma}{ds} = -\frac{du}{A}$, & par conſéquent $\frac{dd\gamma}{ds} = \frac{du}{A}$.

Remarque ſur le LIIe Mémoire, §. II, pag. 45.

1. Si ω eſt ſuppoſé infiniment petit, on aura évidemment $\Omega = \omega(A + B\omega + C\dot{\omega}^2$ &c.), A, B, C, étant

étant des coefficiens conſtans ; & il eſt à remarquer que ces quantités A, B, C, &c. ſont très-grandes, & même infinies, ſi le nombre des coups eſt indéfini. En effet, ſi n eſt le nombre des coups, on a $\Omega =$ $\frac{2\omega[1-2^n(1-\omega)^n]}{1-2(1-\omega)}$; en ſorte que A, par exemple, eſt $= 1+2+4+$ &c. $= \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n-1$, & ainſi du reſte. Il eſt d'ailleurs aiſé de voir, par la nature de la ſuppoſition, & en partant de la théorie ordinaire des probabilités, qu'en ſuppoſant ω très-petit, Ω doit être très-grande, & que néanmoins Ω doit être $= 0$ ſi $\omega = 0$.

2. Ainſi $\int \Omega\, d\omega$, lorſque ω eſt très-petit, ſera $\frac{A\omega^2}{2} + \frac{B\omega^3}{3} +$ &c., & en général $\int \Omega\, d\omega =$ $\int \frac{2\omega d\omega[2^n(1-\omega)^n-1]}{1-2\omega}$, quantité qui s'intégre aiſément par les méthodes connues.

3. Il faut obſerver encore que dans la quantité $\frac{\int n\, d\omega}{n}$, le dénominateur ω étant ſuppoſé repréſenter tous les nombres depuis 0 juſqu'à 1, on peut ſuppoſer pour plus de ſimplicité $\omega = 1$, & téduire $\frac{\int \Omega\, d\omega}{\omega}$ à $\int \Omega\, d\omega$. Mais cette réduction ſuppoſe que tous les cas ſont ici également poſſibles, & c'eſt ce qui n'eſt pas. Car quoiqu'en général il ſoit très-vraiſemblable que la piece a plus de penchant à tomber d'un côté que de l'autre, cepen-

dant il eſt évident qu'on peut regarder comme les cas les plus probables, ceux où ω ne ſera que peu différent de $\frac{1}{2}$, parce que la piéce eſt toujours (au moins très-probablement) conſtruite de maniere qu'elle n'aura que *peu de penchant* à tomber ſur l'une des deux faces de *préférence à l'autre*; le cas où ω ſeroit $= 0$, ou $= 1$, doit être regardé comme impoſſible, ou preſqu'impoſſible, parce qu'il n'eſt pas vraiſemblable que la piece ne puiſſe tomber jamais que ſur une ſeule de ſes deux faces, & le cas où ω ſeroit exactement & rigoureuſement $= \frac{1}{2}$ ſeroit auſſi preſqu'impoſſible, parce qu'elle ſuppoſeroit dans la conſtruction de la piece une perfection preſqu'inadmiſſible. Ainſi, pour rendre la ſolution plus exacte, la quantité Ω doit être multipliée par une quantité Ω', dont la propriété ſoit telle que Ω' ſoit $= 0$ lorſque $\omega = 0$ ou 1; qu'elle ſoit encore $= 0$ lorſque $\omega = \frac{1}{2}$; & qu'elle ſoit enfin très-petite dans preſque tous les cas, excepté ceux où $\omega = \frac{1}{2} + \rho$, ρ étant une très-petite quantité poſitive ou négative, & à l'égard du dénominateur ω, il y faut ſubſtituer la quantité $\int \Omega' d\omega$, laquelle eſt à peu-près $= 2\rho$, puiſque tant que ρ eſt très-petit, Ω' eſt preſque $= 1$, & que ce cas s'étend depuis $\Omega' = \frac{1}{2} + \rho$, juſqu'à $\Omega' = \frac{1}{4} - \rho$. Je ne fais qu'indiquer ces différentes remarques, & les calculs qui doivent en réſulter. On trouvera des recherches à peu-près du même genre dans le Tome IV de nos *Opuſcules*, pag. 74 & ſuiv. & dans le Tome II, pag. 57 & ſuiv.

Remarque ſur la pag. 171, art. 134.

Quand je dis ici que j'ai intégré, par des arcs de ſections coniques, la différentielle de l'attraction d'un ſphéroïde, il faut ſe ſouvenir que l'intégration n'a été faite qu'en partie, puiſque l'élément de l'attraction eſt compoſé d'une différentielle multipliée par une quantité logarithmique ou circulaire. Or c'eſt la différentielle ſeule qui ſe réduit à des arcs de ſections coniques, & il reſte encore, pour compléter l'intégration, à intégrer le produit de cette différentielle par la quantité logarithmique ou circulaire, ce qui eſt le plus difficile. Je donne dans cet art. 134 quelques vues pour eſſayer de réſoudre cette difficulté. C'eſt-là tout ce que je me propoſe.

Remarque ſur le LIIIe Mémoire, art. 134, pag. 172.

1. A la ſeconde ligne de cette page, il faut — au lieu de +, & à la premiere u au lieu de u', cela poſé, voici la preuve de ce qu'on avance en cet endroit. Soit en général $Xdx - Vdu = d\xi$, ξ étant une quantité algébrique, on aura $Xdx \log.\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + Vdu \log.\left(\frac{\sqrt{u}+1}{\sqrt{u}-1}\right) = Xdx \log.\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) - d\xi \log. A\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) + Xdx \log. A\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) = Xdx \log. A -$

$d\xi$ log. $A\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)$; l'intégrale de la premiere quantité eſt évidemment log. $A\int X dx$; l'intégrale de la ſeconde $d\xi$ log. $A\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)$, ſe réduira aiſément (au moyen de l'intégration par parties) à un ſeul ſigne d'intégration, car on ſait que l'intégrale de $d\xi$ log. ζ (ζ étant une fonction de x) eſt ξ log. $\zeta - \int\frac{\xi d\zeta}{\zeta}$.

3. Si l'on ſuppoſoit $Xdx + Vdu$ intégrable, il faudroit alors ſuppoſer $\frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u-1}} = \frac{A\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$, & en général ſi on ſuppoſoit $BXdx + Vdu$ intégrable, il faudroit ſuppoſer que Xdx log. $\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right) - BXdx$ log. $\left(\frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u-1}}\right)$ ſe réduisît à $CXdx$, C étant une conſtante, ce qui donne log. $\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right) - B$ log. $\left(\frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u-1}}\right) = C$, ou (pour plus de facilité) $=$ log. E; d'où l'on tire aiſément la valeur de $\frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u-1}}$ en x. On doit obſerver encore que dans cette même page, lig. 7, il faut mettre $-Ddx\sqrt{x}$, au lieu de $+Ddx$.

Remarque pour la page 34.

Il n'eſt pas facile de déterminer la théorie des reſſorts en les regardant en partie comme des leviers, & en partie comme des corps flexibles. L'hypothèſe la plus

naturelle eſt de regarder le reſſort comme compoſé de leviers infiniment petits, AB, qui ſe meuvent, ou peuvent ſe mouvoir circulairement autour d'une charniere circulaire auſſi infiniment petite, & même infiniment plus petite Ac (Fig. 55, n°. 2), en ſorte qu'on imagine appliquée au point c la force du poids, moins celle de l'élaſticité, laquelle force eſt détruite par la réſiſtance ou tenacité des fibres en c; d'après cette ſuppoſition, ſi on fait la force du reſſort en raiſon inverſe du rayon de courbure, on aura en chaque point le moment du poids $= \frac{k}{R} + A$, k étant l'élaſticité, R le rayon de courbure, & A la force conſtante qui vient de la tenacité. Ce qui ne donne point d'autre différence dans l'équation de l'élaſtique (art. 45, pag. 18) qu'un terme Bx ajouté à la conſtante C.

Cependant le problême reſteroit encore indéterminé, la conſtante C étant toujours inconnue, mais pour la déterminer, on pourra ſuppoſer (Fig. 1) que la tangente en B eſt parallèle aux x, car on ne voit pas de raiſon pourquoi le reſſort feroit en B un angle aigu avec BD.

Il faut remarquer encore que la force de tenacité repréſentée par la conſtante A, étant ſimplement une force de réſiſtance, & non pas une force active, il n'y aura de flexion ſi le moment du poids moins $\frac{K}{R}$ eſt par tout $<$ que A.

Nous donnons ici la ſolution d'après la théorie or-

dinaire, mais on peut y appliquer de même la théorie que nous avons propoſée (art. 9 & ſuiv.) en ayant l'attention d'ajouter pour l'équilibre le moment conſtant A, qui réſulte de la tenacité des fibres. Nous ne voulons que faire voir ici de quelle maniere on peut faire entrer cette tenacité dans la ſolution du problême ; & nous invitons les Géomètres à perfectionner nos vues à ce ſujet, ſi elles leur paroiſſent bien fondées.

Remarque pour la page 96.

La quantité $nd(xu) \times \log.(B - Bnuu)$, étant intégrée par parties, donne à intégrer $\int \frac{nxu^2du}{1-nuu} =$ (en mettant pour x ſa valeur $\frac{\sqrt{(1-uu)}}{\sqrt{(1-nuu)}}$) $\int \frac{nu^2du\sqrt{(1-uu)}}{(1-nuu)^{\frac{3}{2}}}$.

Or en faiſant $uu = z$, & $1 - nuu = t$, on verra aiſément par les Mém. de Berlin, 1746, que cette intégrale dépend d'arcs de ſections coniques.

On peut obſerver (ce qui donne de l'extenſion au calcul dont il s'agit) que la quantité complexe $\int \frac{dx\sqrt{(1-nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}} - \int \frac{du\sqrt{(1-nuu)}}{\sqrt{(1-uu)}}$, repréſente également, ou la différence de deux arcs d'ellipſe qui vont en ſens contraires, ou la ſomme de deux arcs qui vont dans le même ſens, en ajoutant s'il eſt néceſſaire, une conſtante convenable.

Remarque pour l'art. 112 du LIIIe Mémoire.

1. L'attraction ſuivant BD eſt exactement $\frac{r\,d\zeta}{(aa+bb-2br\cos.\zeta+rr)^{\frac{1}{2}}}$; & l'attraction en D parallèlement à CB eſt $\frac{r\,d\zeta\times(b-r\cos.\zeta)}{(aa+bb-2br\cos.\zeta+rr)^{\frac{3}{2}}}$; ſuppoſons $CD=\rho$, & l'angle $BCD=u$, ce qui donne $a=\rho$ ſin. u, $b=\rho$ cos. u, on trouvera que l'attraction perpendiculaire à CD au point D, eſt après les réductions $\frac{r\,d\zeta}{(\rho\rho-2\rho r\cos.u\cos.\zeta+rr)^{\frac{3}{2}}}\times-r\cos.\zeta\sin.u$.

2. D'où il s'enſuit que ſi on ſuppoſe le point D placé ſur une ſphere ou demi ſphere du rayon ρ, & qu'on imagine une infinité de grands cercles de cette ſphere, paſſans par le centre C, & attirans le point D, l'attraction en D perpendiculaire à CD aura pour élément $\frac{r\,d\zeta}{(\rho\rho-2\rho r\cos.u\cos.\zeta+rr)^{\frac{3}{2}}}\times(r\cos.u\,du)\times-(r\cos.\zeta\sin.u)$, quantité qui s'intégrera, d'abord par rapport à r, enſuite par rapport à u, au moyen des formules connues, en faiſant cos. $u=x$, ce qui donnera à intégrer une quantité de la forme $\frac{x\,dx}{(A+Bx)^{\frac{1}{2}}}$; enfin, par rapport à ζ; mais dans ce dernier cas, on aura beſoin de la rectification des ſections coniques.

3. Ceci pourroit ſervir à trouver la déviation du fil à plomb, par l'attraction d'une montagne ſphérique, en un point quelconque D de cette montagne. Car le rayon CD étant très-petit par rapport au rayon de la terre, l'attraction perpendiculaire à CD, l'eſt auſſi à peu-près au rayon de la terre, & donne par conſéquent à très-peu-près la déviation horiſontale.

4. Si le pendule eſt au pied de la montagne, ſuppoſée de la denſité δ, l'attraction horiſontale eſt alors la moitié de l'attraction d'une ſphère du rayon r & de la denſité δ, ce qui rend la déviation facile à calculer.

5. Nous ne devons pas oublier d'obſerver, que dans l'intégrale indiquée ci deſſus (art. 2) les quantités dépendantes de la rectification des ſections coniques, doivent s'évanouir s'il eſt queſtion d'une ſphere entiere, & même d'un hémiſphere où le point D ſeroit placé de telle ſorte que l'angle DCB fût $= 0$; il pourroit de même arriver que ces quantités vinſſent à s'évanouir, s'il étoit queſtion d'un hémiſphere, & d'un angle fini DCB. C'eſt un calcul que nous nous contentons d'indiquer, & dont le réſultat pourroit être plus ſimple qu'on ne le croiroit d'abord.

6. Si on ne veut pas regarder la montagne comme ſphérique, mais comme une maſſe d'une grande étendue par rapport à ſa hauteur, ainſi que nous l'avons fait dans le Tome VI de nos *Opuſc.* pag. 86 & ſuiv. on pourroit alors regarder a comme très-petite par rapport à r & à b, & l'attraction ſuivant BD ſeroit cenſée

$=$

$= \frac{r a\, d\zeta}{(bb - 2br\cos\zeta + rr)^{\frac{1}{2}}}$, mais l'intégration totale dépendroit toujours de la rectification des ſections coniques.

Remarque pour le LIIIe Mémoire, art. 126, page 166.

A propos de ces ſolides formés par la révolution de l'ellipſe autour de ſes diametres conjugués, on peut voir dans l'*Encyclopédie*, au mot *Ellipſe*, Tom. V, pag. 517, col. 2, la démonſtration très-ſimple que j'ai donnée de deux autres théorêmes connus ſur ces diamètres; ſavoir, que les parallélogrammes faits ſur eux ſont égaux, & que la ſomme de leurs quarrés eſt conſtante. J'indique ici ces démonſtrations, parce que la méthode que j'y ai employée peut être employée dans beaucoup d'autres cas, pour prouver très-ſimplement qu'une quantité eſt toujours la même, en faiſant voir que ſa différence eſt nulle. On peut voir dans l'endroit cité de l'*Encyclopedie*, nos réflexions ſur ce ſujet.

Sur le LVe Mémoire, §. II.

1. A l'occaſion des nouvelles recherches que je donne dans cet article, ſur la rotation d'un corps de figure quelconque, je crois devoir dire un mot ſur la queſtion que j'ai traitée dans le Tome IV de mes *Opuſc.* pag. 20 & ſuiv. ſur les ſolides dans leſquels tout axe paſſant par

le centre de gravité, eſt un axe ſpontané de rotation. La ſolution que j'ai donnée de ce problême, pag. 27, art. 76 & ſuiv. n'étant que pour des ſolides peu différens d'une ſphere, n'eſt pas rigoureuſement exacte, à cauſe des petites quantités qu'on y néglige, ſuivant la méthode uſitée dans ces ſortes de queſtions. Ainſi la rotation autour d'un axe quelconque, n'eſt pas rigoureuſement conſtante, mais ſeulement à un infiniment petit du ſecond ordre près. Il en eſt à peu-près ici comme d'un ſphéroide elliptique peu différent d'une ſphere, & recouvert d'un fluide, tel que les denſités du ſphéroide & du fluide ſoient entr'elles comme 3 à 5. J'ai démontré que ce ſphéroide ſeroit toujours en équilibre, quelque figure qu'on lui ſupposât, pourvu qu'elle fût elliptique & peu différente d'une ſphere. Mais l'équilibre n'a lieu qu'à un infiniment petit du ſecond ordre près, à cauſe des quantités qu'on néglige. Ainſi la recherche *rigoureuſe* du ſphéroide dont tous les axes donnent une rotation uniforme, mérite encore le travail des Géomètres, & peut-être trouvera-t-on que de tous les ſolides homogènes il n'y a que la ſphere qui ait exactement cette propriété. Il eſt certain que dans la ſphère (où tout eſt ſemblable dans toutes ſes parties) *il n'y a point de raiſon* pour qu'un axe ſoit plutôt que l'autre un axe de rotation uniforme, & qu'ainſi ils le doivent être tous. Cette raiſon n'auroit pas lieu pour un corps non-ſphérique, & peut-être ſeroit-il permis d'en conclure que tous les axes de ce corps

indifféremment n'ont pas la propriété dont il s'agit. Mais j'avoue que cette preuve n'eſt pas démonſtrative, & que le calcul ſeul peut nous éclairer pleinement ſur ce ſujet.

Fin du ſeptième Volume.

Fautes à corriger dans le ſeptiéme Volume.

Page 4, *ligne* 2. *Le — qui eſt au-devant de la barre, doit être au-deſſus, cette faute ſe trouve dans quelques autres endroits ; il ſuffit d'en avertir, les Lecteurs la corrigeront aiſément.*

Page 60, *ligne* 10, *au lieu de* en parlant, *liſez* en partant.

Page 91, *ligne* 4, *à compter d'en-bas, au lieu de* Rx, *liſez* Rz.

Page 93, *ligne* 1, *après* un nombre entier, *ajoutez* impair.

Page 101, *ligne* 3, *à compter d'en-bas*, au lieu de b négatif, liſez b poſitif.

Page 136, *ligne* 9, *à compter d'en-bas*, au lieu de $a^2\mu^2+\frac{b^2}{c^2}$, liſez $-a^2\mu^2-\frac{b^2}{c^2}$.

Page 144, *ligne* 11, au lieu de $y=bz^2$, liſez $yz=z^2$.

Page 185, *ligne* 3, au lieu de >1, liſez <1.

Page 200, *ligne* 4, *à compter d'en-bas, au lieu de* mulupliés, *liſez* multiplié.

Page 203, *ligne* 16, au lieu de $F=$, liſez $F+$.

Page 205, *ligne* 11, au lieu de B, C, liſez B', C'.

Page 224, *ligne* 7, *au lieu de* verticale, *liſez* horiſontale.

Page 232, *ligne* 13, *à compter d'en bas*, au lieu de ay, liſez $a+y$.

Page 303, *ligne* 2, *à compter d'en-bas, au lieu de* propoſe, *liſez* propoſe.

Page 365, *ligne* 10, *au lieu de* art. 44, *liſez* art 32.

Page 367, *ligne* 6, *au lieu de* art. 55, *liſez* art. 54.

Page 368, *ligne* 6, *au lieu de* art. 36, *liſez* art. 55.

UNE inadvertance de l'Imprimeur eſt cauſe que dans l'*Appendice* de ce Volume, l'ordre des Remarques n'eſt pas exactement (comme il l'auroit dû être) le même que celui des pages auxquelles ces Remarques ſe rapportent, le Lecteur eſt prié d'y faire attention.

Digitized by Google

L'ordre des Remarques dans l'*Appendice* doit être tel qu'il ſuit :

Remarque ſur la page 16,.....Voyez page 384 de l'*Appendice*.
Remarque ſur la page 34,.....Voyez page 388.
Remarque ſur la page 45,.....Voyez page 384.
Remarque ſur la page 96,.....Voyez page 390.
Remarque ſur la page 166,.....Voyez page 393
Remarque ſur les pages 171 & 172,....Voyez page 387.
Remarque ſur l'art. 112 du LIIIe Mém. Voyez page 391.
Remarque ſur le LVe Mém. §. II,.....Voyez page 395.

Ce même ordre a été rétabli tel qu'il doit être, dans la Table des Titres.

AVIS AU RELIEUR.

Le Relieur aura attention à bien placer les cartons des Tomes VII & VIII.

Il y en a un pour le Tome VII, pages 95 & 96.

Pour le Tome VIII, il y en a quatre; ſavoir, un pour les pages 27 & 28; les trois autres ſont pour les pages 47, 48, 49, 50, 51 & 52.

Fig. 1

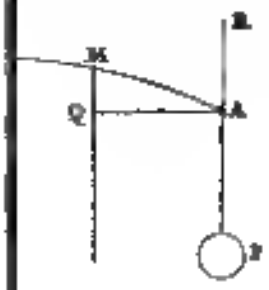


Fig. 2

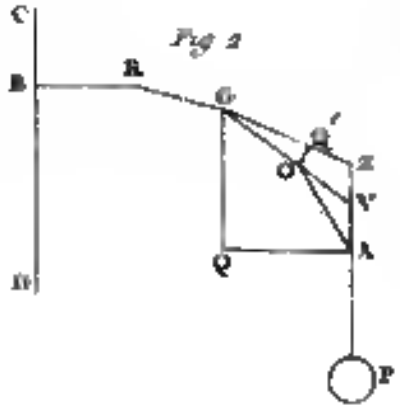


Fig. 3

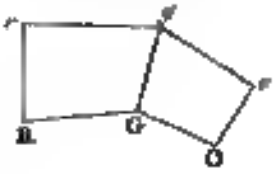


Fig. 4

Fig. 5

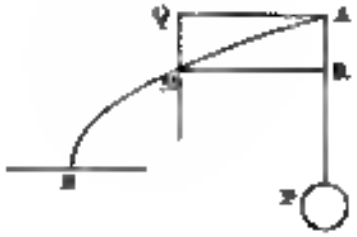


Fig. 6

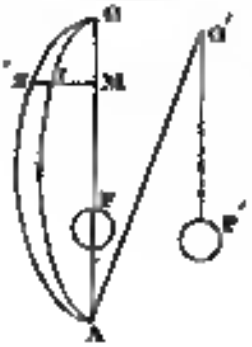


Fig. 7

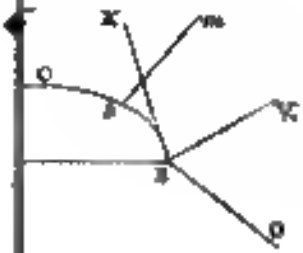


Fig. 8

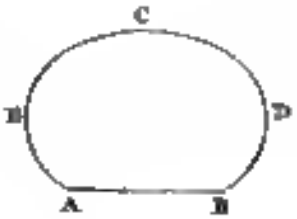


Fig. 9

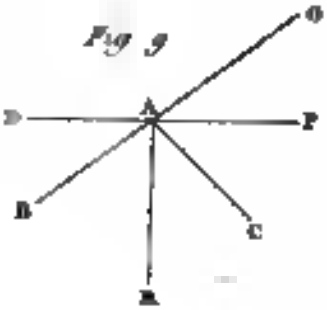


Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12

Fig 14

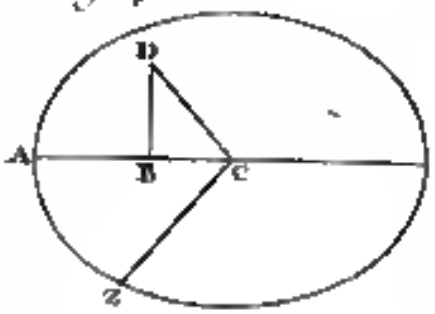
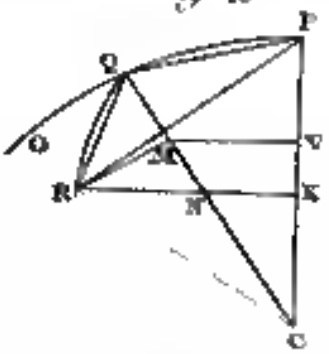


Fig 15



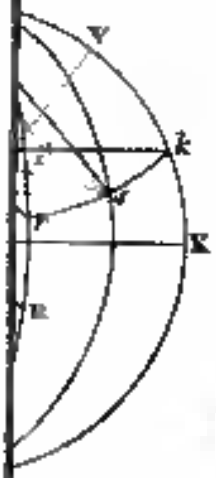


Fig 17

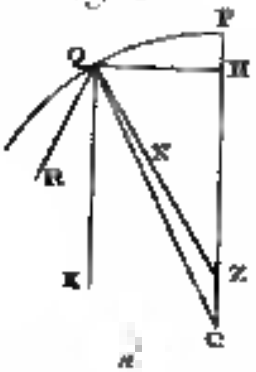
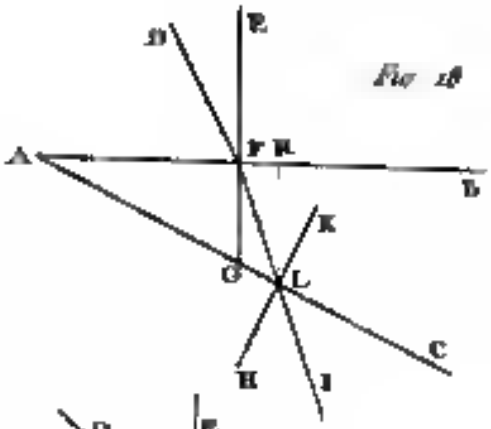


Fig 18



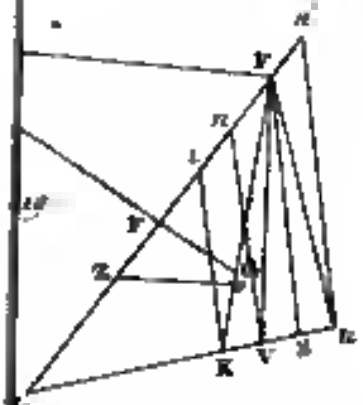


Fig 20

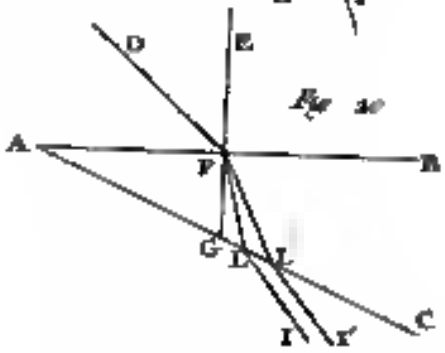


Fig 21

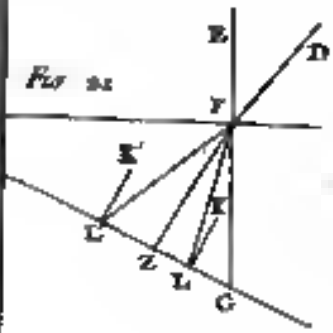


Fig 22

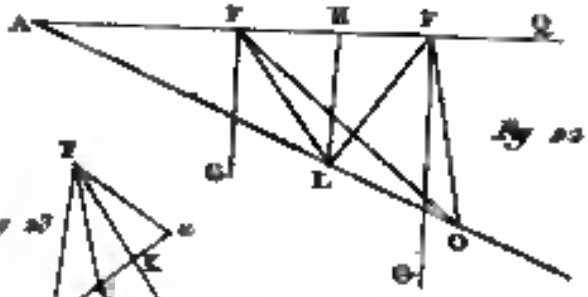


Fig 23

Fig 26

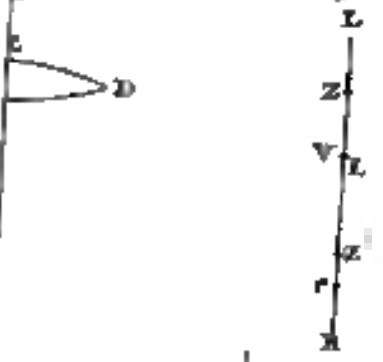


Fig 28

Fig 27

Fig 29

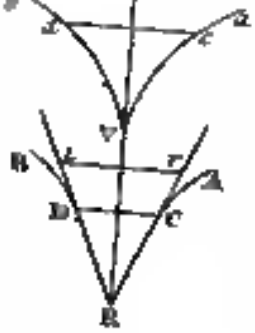


Fig 30

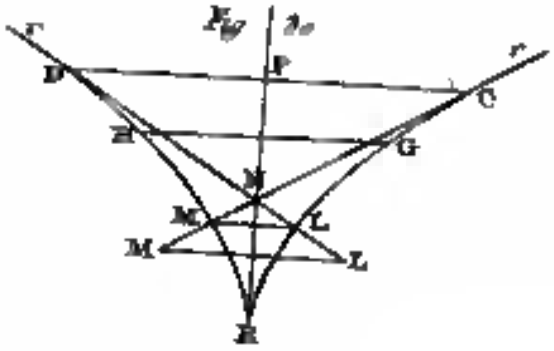


Fig 31

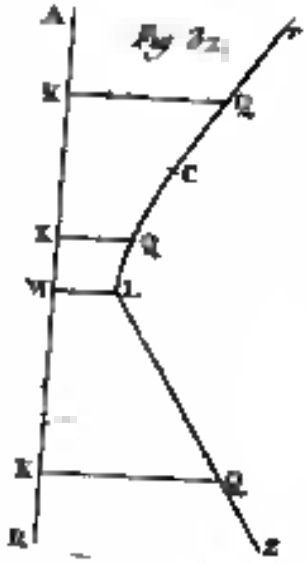


Fig 33

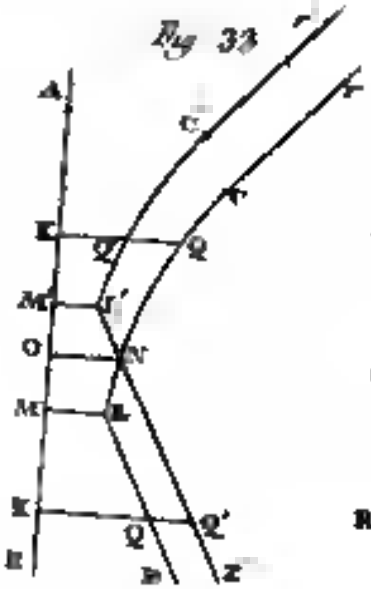


Fig 34

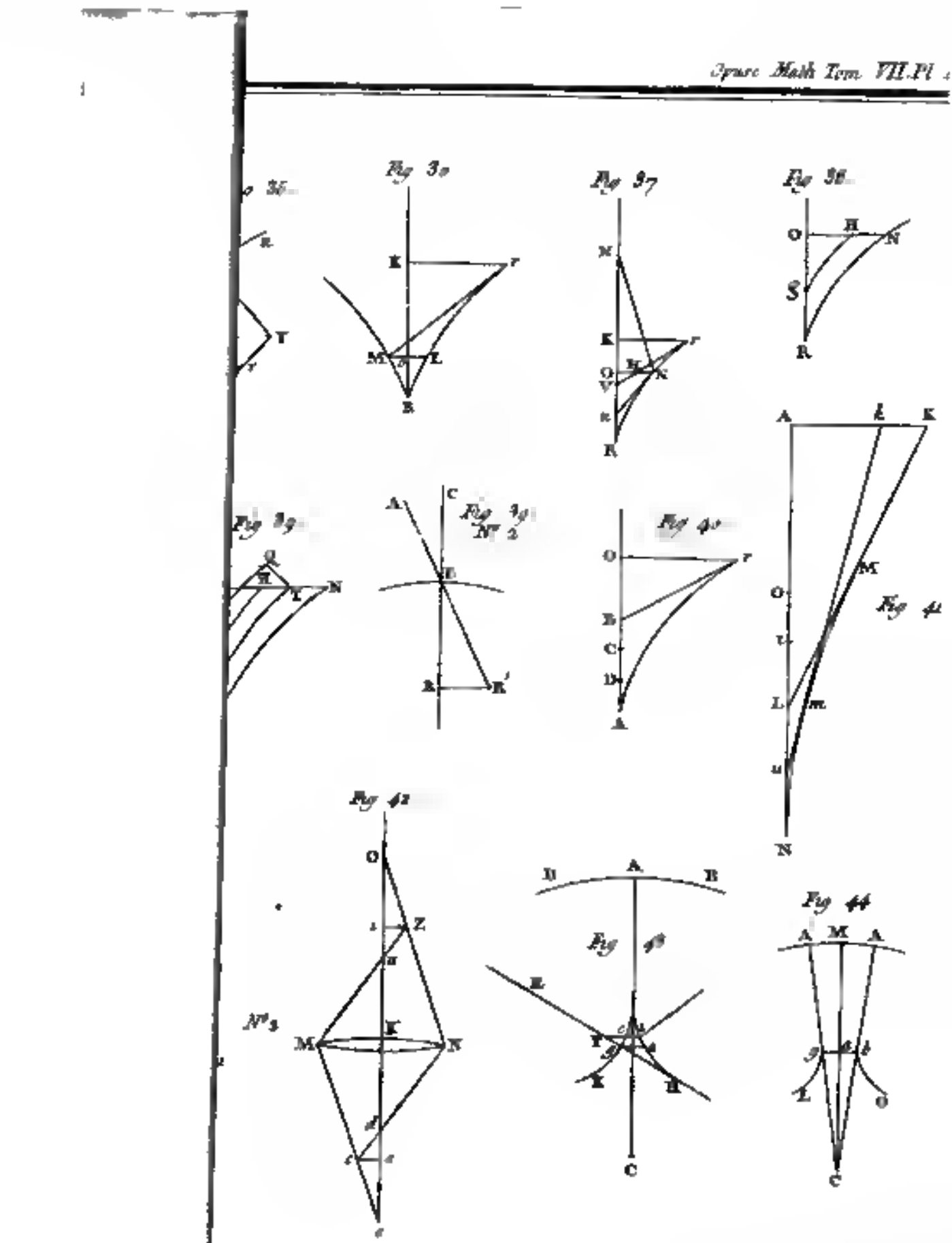
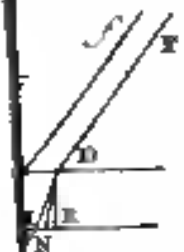
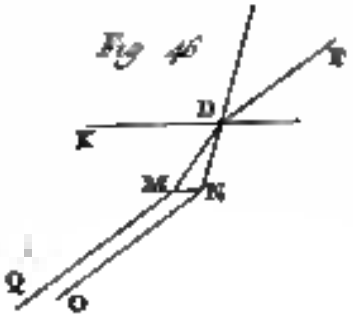
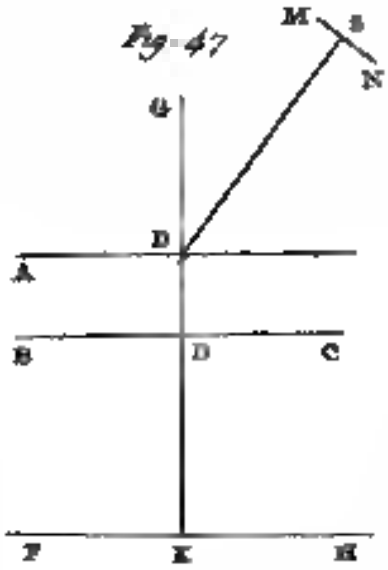
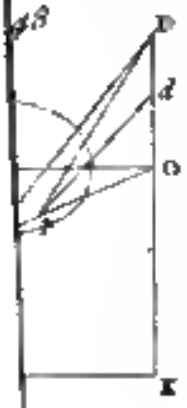


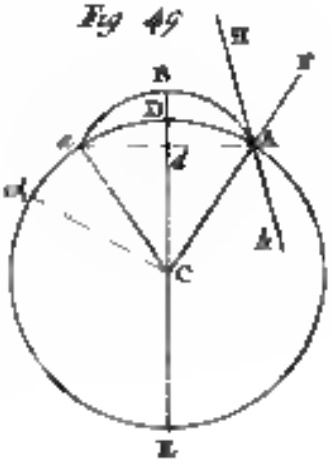
Fig 36
Fig 37
Fig 38
Fig 39
Fig 40
Fig 41
Fig 42
Fig 43
Fig 44
N° 2
N° 3

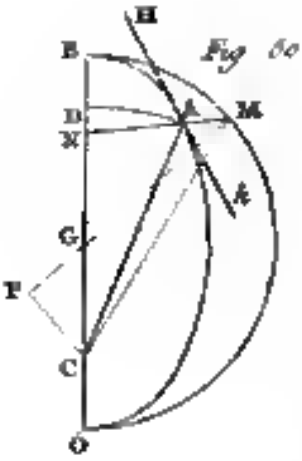


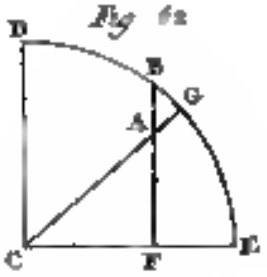


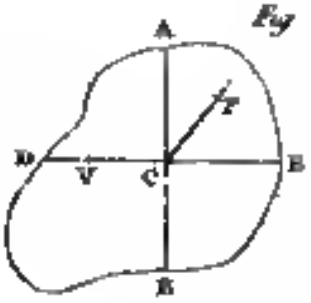


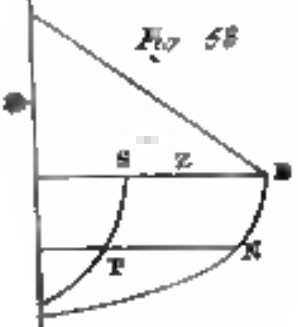












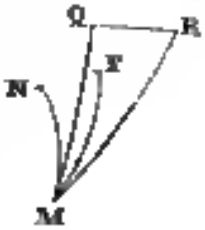


Fig 46

Fig 47

M
S
N
G
D
A
B
D
C
F
K
H

48

Fig 49

H
T
B
D
a
A
d
α
C
h
E

Fig 50

H
B
D
N
A
M
h
G
P
C
O

61

Fig 52

Fig 53

Fig 54

Fig 56

Fig 56 Nº 2